最小方差控制原理

Prof. Yuan-Li Cai

Spring 2024

0. Outline

1 线性时不变随机系统分析 / 3

2 有理谱分解定理 / 29

3 离散时间随机系统的多项式表示 / 47

4 最小方差预测 / 56

5 最小方差控制 / 78

6 广义最小方差控制 / 95

最小方差控制是随机系统一种经典优化控制方法，它的主要目标是找到控制策略使得系统输出的方差最小。最小方差控制广泛用于数学模型不完全准确或存在噪声扰动的系统中，在工业过程控制、电力系统、通信系统、机器人、金融经济、汽车工业及航空航天等领域有广泛的应用。

本章主要介绍单输入-单输出离散时间系统的多项式形式描述、最小方差控制基本原理等，相关理论可以较容易地拓展到多输入-多输出随机量系统。

1. 线性时不变随机系统分析

传统控制技术主要关注线性时不变系统，通常需要研究在平稳随机信号的作用下系统的输出特征。对于线性时不变系统，频域分析是行之有效的方法。

1.1 平稳随机信号功率谱密度

平稳随机信号，数学上用平稳过程来描述。在时域，相关函数是随机过程的重要统计特征。为描述平稳过程在频域上的统计特征，常用到谱密度的概念。谱密度在平稳过程的理论和应用上都很重要。

1.1.1 连续时间信号

从数学上看，谱密度是相关函数的傅里叶变换（简称傅式变换），它的物理意义是功率谱密度。

设 $y(t)$ 是一平稳随机过程，其自相关函数定义为 $R_y(t-s)=R_y(\tau)$，即

$$R_y(t,s)=Ey(t)y(s)=Ey(t)y(t+\tau)=R_y(\tau) \tag{1}$$

平稳过程 $y(t)$ 的相关函数 $R_y(\tau)$ 可以表示为

$$R_y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\tau\omega}d\widetilde{F}(\omega),\ -\infty<\tau<\infty \tag{2}$$

其中，$\widetilde{F}(\omega)$ 是有界非降函数，且

$$\widetilde{F}(-\infty)=0, \quad \widetilde{F}(+\infty)=2\pi R_y(0)$$

式 (2) 称为维纳-辛钦（Wiener - Khintchine）公式。其中 $\widetilde{F}(\omega)$ 称为**平稳过程** $y(t)$ **的谱函数**。

如果存在非负函数 $S_y(\omega)$ 使

$$\widetilde{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega} S_y(\omega)d\omega, \quad -\infty<\omega<\infty$$

那么称 $S_y(\omega)$ 为**平稳过程** $y(t)$ **的功率谱密度**。

如果相关函数 $R_y(\tau)$ 满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}|R_y(\tau)|d\tau<\infty$，那么 $\widetilde{F}(\omega)$ 可微，故有 $\widetilde{F}'(\omega)=S_y(\omega)$。此时 (2) 可变为

$$R_y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\tau\omega}S_y(\omega)d\tau,\quad -\infty<\tau<\infty \tag{3}$$

利用傅里叶变换理论，将式 (3) 反演可得

$$S_y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\tau\omega}R_y(\tau)d\tau,\quad -\infty<\omega<\infty \tag{4}$$

该式是平稳随机过程 $y(t)$ 的功率谱密度的另外一种定义，功率谱密度也简称为**谱密度**。有的资料给出的定义差一个比例常数 $1/2\pi$。可见,$S_y(\omega)$ 是 $R_y(\tau)$ 的傅里叶变换，而 $R_y(\tau)$ 是 $S_y(\omega)$ 的傅里叶逆变换。

功率谱密度具有下列重要性质:

(1) 功率谱密度非负, 即 $S_y(\omega) \geq 0$;

(2) 功率谱密度是 ω 的实函数;

(3) 对于实随机过程来说, 功率谱密度是 ω 的偶函数, 即 $S_y(\omega) = S_y(-\omega)$;

(4) 功率谱密度可积, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega < +\infty$。

Example 1.1 设平稳随机信号 $y(t)$ 的自相关函数为

$$r_y(\tau) = \beta^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0$$

试求信号 $y(t)$ 的功率谱密度 $S_y(\omega)$。

【解】根据定义，有

$$
\begin{aligned}
S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r_y(\tau) e^{-j\tau\omega} R_y(\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^2 e^{-\alpha|\tau| - j\omega\tau} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{0} \beta^2 e^{\alpha\tau - j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \beta^2 e^{-\alpha\tau - j\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{2\alpha\beta^2}{\omega^2 + \alpha^2}
\end{aligned}
$$

□

对于实值平稳过程 $y(t)$，若它的均值为零，且谱密度在所有的频率范围内为非零的常数，即 $S_y(\omega)=N_0(-\infty<\omega<\infty)$，则称 $y(t)$ 为**白噪声过程**。

白噪声过程有类似于白光的性质，其能量谱在各种频率上均匀分布，故有“白”噪声之称。在信号处理领域，认为白噪声的统计特性不随时间推移而改变，故是平稳过程。但是它的相关函数在通常的意义下的傅氏逆变换不存在，所以，为了对白噪声过程进行频谱分析，需要进一步讨论狄拉克 δ 函数的傅氏变换。

Definition 1.1 (狄拉克 δ 函数，冲激函数) 具有下列性质的函数 $\delta(\cdot)$：

$$(1)\ \delta(x)=0, \quad x\neq 0;$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

称为狄拉克 δ 函数或冲激函数，简称 δ 函数；

δ 函数是一种广义函数，用以描述瞬时冲击行为，在自动控制、信号处理、量子力学以及其它物理学科中有着重要用途。δ 函数有一个非常重要的运算性质，即对任何连续函数 $f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x-t)dx=f(t) \tag{5}$$

因此，δ 函数的傅氏变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-j\tau\omega} d\tau = e^{-j\tau\omega}|_{\tau=0} = 1 \tag{6}$$

由傅氏逆变换，可得 δ 函数的傅氏积分表达式为

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\tau\omega} d\omega \tag{7}$$

故 δ 函数与 1 构成一对傅氏变换，即若相关函数 $R_y(\tau) = \delta(\tau)$，则它的谱密度 $S_y(\omega) = 1$。同样的方法可证 1 与 $2\pi\delta(\tau)$ 构成一对傅氏变换。换言之，若相关函数 $R_y(\tau) = 1$，则对应的谱密度为 $S_y(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$。

由此，我们可以得到白噪声过程的另一种定义。

Definition 1.2 (白噪声) 如果平稳随机过程 $w(t)$ 均值为零，相关函数为 $R_w(\tau)=R\delta(\tau)$（R 是一非负的常数），那么 $S_w(\omega)=R$，则称随机过程 $w(t)$ 为白噪声过程。

上述白噪声 $w(t)$ 的定义表明，在任何两个不同时刻 t_1 和 t_2，$w(t_1)$ 和 $w(t_2)$ 不相关，即白噪声随时间变化的起伏极快，而过程的功率谱极宽，对不同输入频率的信号都能产生干扰。

1.2 离散时间信号

离散时间随机过程，也称为随机序列、离散时间随机信号。

设 $\{y_k\}$ 为均值为零平稳随机序列，若 n 只取离散值，其相关函数为 $R_y(k-i)=R_y(n)$，即

$$R_y(k,i)=Ey_ky_i=R_y(k-i)=R_y(n) \tag{8}$$

则有

$$R_y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jn\omega}d\widetilde{F}(\omega),\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{9}$$

其中，$\widetilde{F}(\omega)$ 是 [-π, π] 上的有界非降函数，且 $\widetilde{F}(-\pi)=0$，$\widetilde{F}(\pi)=2\pi R_y(0)$。上述结果可通过赫尔格洛兹定理进行证明。

式 (9) 中 $\widetilde{F}(\omega)$，$\omega\in[-\pi,\ \pi]$，称为**平稳序列的谱函数**。如果存在非负函数 $S_y(\omega)$ 使

$$\widetilde{F}(\omega)=\int_{-\pi}^{\omega}S_y(\omega)d\omega,\quad -\pi\leq\omega\leq\ \pi$$

那么称 $S_y(\omega)$，$\omega\in[-\pi,\ \pi]$，为**平稳序列 $\{y_k\}$ 的功率谱密度**，同样简称为谱密度。

如果 $R_y(n)$ 满足条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|R_y(n)|<\infty$，可以证明 $\widetilde{F}(\omega)$ 可微，有 $\widetilde{F}'(\omega)=S_y(\omega)$，$-\pi<\omega<\pi$。此时，式 (9) 可变为

$$R_y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{jn\omega}S_y(\omega)d\omega,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{10}$$

其反演公式为

$$S_y(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-jn\omega}R_y(n) \tag{11}$$

该式也为平稳随机序列的功率谱密度的另一定义。(有的资料给出的定义差一个比例常数 $1/2\pi$)

Example 1.2 设平稳随机序列 $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ 的自相关函数为

$$r_y(n) = \beta^2 e^{-\alpha|n|}, \quad \alpha > 0$$

试求功率谱密度 $S_y(\omega)$。

【解】根据定义，可知

$$
\begin{aligned}
S_y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_y(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta^2 e^{-\alpha|n|-jn\omega} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\omega} \cdot \beta^2 e^{-\alpha|n|} \\
&= \beta^2 [\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{(\alpha-j\omega)n} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{(-\alpha-j\omega)n}] \\
&= \beta^2 [1 + \frac{e^{-(\alpha-j\omega)n}}{1-e^{-(\alpha-j\omega)n}} + \frac{e^{(-\alpha-j\omega)}}{1-e^{(-\alpha-j\omega)}}] \\
&= \frac{(1-e^{-2\alpha})\beta^2}{1-2e^{-\alpha}\cos\omega + e^{-2\alpha}}
\end{aligned}
$$

□

类似于连续时间白噪声，我们可以定义离散时间白噪声。

Definition 1.3 (白噪声序列) *设 $\{w_k\}$ 为均值为零的实值平稳序列，如果其谱密度在 $\omega \in (-\pi, \pi)$ 内为非零的常数 R，即 $S_w(\omega) = R(-\pi < \omega < \pi)$，则称 $\{w_k\}$ 为***白噪声序列**。

利用 Kronecker δ 函数可以得到的白噪声序列另外一种形式的定义：设 $\{w_k\}$ 为均值为零的实值平稳随机序列，若 $R_w(k-i) = R\delta_{ki}$，那么 $S_w(\omega) = R$，则称平稳不相关随机序列 $\{w_k\}$ 为白噪声序列。

1.3 连续时间 LTI 系统

在自动控制、无线通信、机械振动等领域，经常遇到的各类随机过程是与“系统”相联系的。简单地讲，所谓系统就是指能对各种输入按一定的要求产生输出的装置，如放大器、滤波器、无源网络等都是系统。

设对系统输入 $\boldsymbol{x}(t)$ 时，系统的作用为 L，其输出为 $\boldsymbol{y}(t)$，则它们的关系可表达为 $\boldsymbol{y}(t) = L\left[\boldsymbol{x}(t)\right]$，其中的“$L$”在数学上代表算子，它可以是加法、乘法、微分、积分和微分方程求解等数学运算。

Definition 1.4 (线性算子) 设 L 是一个算子，如果 $\boldsymbol{y}_1(t) = L[\boldsymbol{x}_1(t)]$，$\boldsymbol{y}_2(t) = L[\boldsymbol{x}_2(t)]$，对任意常数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，有

$$L\left[\alpha \boldsymbol{x}_1(t) + \beta \boldsymbol{x}_2(t)\right] = \alpha L\left[\boldsymbol{x}_1(t)\right] + \beta L[\boldsymbol{x}_2(t)] = \alpha \boldsymbol{y}_1(t) + \beta \boldsymbol{y}_2(t)$$

则称 L 为线性算子。

对于一个系统，若其对应的算子 L 是线性的，则称该系统为线性系统。

Definition 1.5 (时不变系统) 对于系统 $\boldsymbol{y}(t)=L[\boldsymbol{x}(t)]$，如果对任一时间平移 $\tau \in \mathbb{R}^{+}$，都有

$$\boldsymbol{y}(t+\tau)=L[\boldsymbol{x}(t+\tau)]$$

则称该系统为时不变系统。

一个线性系统，如果还是一个时不变系统，则称为线性时不变（LTI）系统。线性性质表现为该系统满足叠加原理，而时不变性质表现为输出对输入的关系不随时间推移而变化。

在时域中，线性时不变系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 等于输入 $\boldsymbol{x}(t)$ 与单位冲击响应 $\boldsymbol{h}(t)$ 的卷积，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{h}(t) * \boldsymbol{x}(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{h}(t-\tau)\boldsymbol{x}(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \boldsymbol{h}(t-\tau)\boldsymbol{x}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{12}$$

其中，‘$*$’表示卷积运算。

由此，不难建立如下结论：

Theorem 1.1 *设定常线性系统 L 的单位冲击响应函数为 $\boldsymbol{h}(t)(t \geq 0)$。若系统的输入 $\boldsymbol{x}(t)(-\infty < t < \infty)$ 是一个平稳过程，它的数学期望是 $\boldsymbol{m}_x$，而相关函数（矩阵）为 $\boldsymbol{R}_x(\tau)$，则系统的输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 是一个平稳过程。*

对于 LTI 系统，可以在频域建立输入输出频谱之间的关系。由系统单位冲击响应可得连续时间 LTI 系统的传递函数（对于多输入-多输出系统，相关量为矩阵或向量，用黑体字符表示）

$$\boldsymbol{H}(s)=\mathcal{L}\left[\boldsymbol{h}(t)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{h}(t)e^{-st}dt \tag{13}$$

其中，$\mathcal{L}(\cdot)$ 表示 Laplace 变换。

进一步地，输出的相关函数为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_y(t)&=\boldsymbol{h}(t)*\boldsymbol{R}_{xy}(t) \\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{h}(t-\tau)\boldsymbol{R}_{xy}(\tau)d\tau=\int_0^t\boldsymbol{h}(t-\tau)\boldsymbol{R}_{xy}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{14}$$

输入与输出的互相关函数为

$$\boldsymbol{R}_{xy}(\lambda - t) = \int_0^t \boldsymbol{R}_x(\lambda - \tau)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(t-\tau)d\tau \tag{15}$$

$$\boldsymbol{R}_{xy}(-t) = \int_0^t \boldsymbol{R}_x(-\tau)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(t-\tau)d\tau \tag{16}$$

因此，可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{xy}(t) &= \int_0^{-t} \boldsymbol{R}_x(-\tau)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(-t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{-t} \boldsymbol{R}_x(\tau)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(-t-\tau)d\tau \\ &= \boldsymbol{R}_x(-t)*\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(-t) = \boldsymbol{R}_x(t)*\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(-t)\end{aligned} \tag{17}$$

将 (17) 代入 (14) 可得

$$\boldsymbol{R}_y(t) = \boldsymbol{h}(t) * \boldsymbol{R}_x(t) * \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(-t) \tag{18}$$

注意到 $(\mathcal{L}[\boldsymbol{h}(t)] = \boldsymbol{H}(s))$

$$\boldsymbol{H}(s)|_{s=j\omega} = \boldsymbol{H}(j\omega) \tag{19}$$

另外，输入平稳随机过程的功率谱密度为

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{R}_x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{20}$$

那么由 (18)，可知输出的功率谱密度就为

$$\boldsymbol{\Phi}_y(\omega) = \boldsymbol{H}(j\omega)\boldsymbol{\Phi}_x(\omega)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(-j\omega) \tag{21}$$

如果输入为单位白噪声，则有

$$\boldsymbol{\Phi}_y(\omega) = \boldsymbol{H}(j\omega)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(-j\omega) \tag{22}$$

以上讨论的是一般的多输入-多输出系统，对于单输入单输出（SISO）系统，可简化为

$$\Phi_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \tag{23}$$

1.4 离散时间 LTI 系统

离散时间 LTI 系统同样表现为该系统同时满足叠加原理和时不变性质。设离散时间 LTI 系统的输入为 $\boldsymbol{x}_k$，输出为 $\boldsymbol{y}_k$，系统的单位脉冲响应为 $\boldsymbol{h}(k)$。与连续时间情形类似，将积分修改为求和，则可得离散时间 LTI 系统的传递函数（矩阵）为

$$\boldsymbol{H}(z)=\mathcal{Z}\left[\boldsymbol{h}(k)\right]=\sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k}\boldsymbol{h}(k) \tag{24}$$

其中，$\mathcal{Z}$ 表示离散时间域的 $z-$ 变换。

类似连续时间 LTI 系统的推导过程，我们也可以导出平稳随机序列通过 LTI 系统后输出序列的相关函数表达式

$$\boldsymbol{R}_y(n)=\boldsymbol{h}(n)*\boldsymbol{R}_x(n)*\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(-n) \tag{25}$$

以及输出谱密度和传递函数之间的关系

$$\boldsymbol{\Phi}_y(\omega)=\boldsymbol{H}\left(e^{j\omega}\right)\boldsymbol{\Phi}_x(\omega)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(e^{-j\omega}\right) \tag{26}$$

如果输入为单位白噪声，那么此时

$$\boldsymbol{\Phi}_y(\omega)=\boldsymbol{H}\left(e^{j\omega}\right)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(e^{-j\omega}\right) \tag{27}$$

对于 SISO 系统，可表示为

$$\Phi_y(\omega)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \tag{28}$$

2. 有理谱分解定理

若谱密度函数 $S(\omega)$ 是有理函数，则称 $S(\omega)$ 为有理谱密度。所谓有理函数，就是通过多项式的加减乘除得到的函数，即代数分数，分子和分母都是多项式。

具有有理谱密度的随机过程称为有理谱密度随机过程。下面通过平稳随机过程和序列两种情形讨论谱分解问题。

2.1 平稳随机过程

由前述讨论，如果 $y(t)$ 是一个平稳随机过程，它的自相关函数为

$$R_y(\tau) = Ey(t)y(t+\tau) \tag{29}$$

对应的谱密度 $S_y(\omega)$ 可表示为

$$S_y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} R_y(t) dt \tag{30}$$

式中，$s = j\omega$。

另外，我们知道对于稳定的线性时不变系统 $H(s)$，如果输入为平稳随机过程 $w(t)$，那么输出也为平稳随机过程，且谱密度为

$$S_y(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega)S_w(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_w(\omega) \tag{31}$$

当 $w(t)$ 是白噪声，且 $S_w(\omega) = 1$ 时，有

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \tag{32}$$

这里就存在一个相反的问题，如果已知 $S_y(\omega)$，能否把它分解为 (32) 的形式，这就是**谱分解问题**。一般来说，对任意谱密度进行分解是困难的，甚至是不可能的。但是，对有理谱密度可以容易地进行谱分解，很多实际问题属于这种情况。

设平稳随机过程的谱密度为 ω^2 的有理分式函数，即

$$S\left(\omega^2\right)=\frac{g_0\omega^{2m}+g_1\omega^{2(m-1)}+\ldots+g_m}{\omega^{2n}+f_1\omega^{2(n-1)}+\ldots+f_n}\geq 0 \tag{33}$$

式中，$n>m$。可以将上式进行因式分解。若用复频率 s 来表示功率谱密度，那么，对于一个有理函数，总能把它表示成如下形式：

$$S(s)=a^2\frac{(s-a_1)\cdots(s-a_{2m})}{(s-b_1)\cdots(s-b_{2n})},\quad a_i\neq b_i \tag{34}$$

式中，s 为复频率，$s=\sigma+j\omega$；$a_k,b_l(k=1,2,\cdots,2m;l=1,2,\cdots,2n)$ 分别表示 $S(s)$ 的零、极点。此外，一定有

$$S\left(\omega^2\right)=H(j\omega)H(-j\omega)=|H(j\omega)|^2 \tag{35}$$

其中，

$$H(j\omega)=H(s)=a\frac{(s-\alpha_1)\cdots(s-\alpha_m)}{(s-\beta_1)\cdots(s-\beta_n)} \tag{36}$$

$$H(-j\omega)=a\frac{(s-\alpha_1^*)\cdots(s-\alpha_m^*)}{(s-\beta_1^*)\cdots(s-\beta_n^*)} \tag{37}$$

在以上二式中，α_k 与 α_k^* 互为复共轭，$k=1,2,\cdots,m$；β_l 与 β_l^* 互为复共轭，$l=1,2,\cdots,n$；$H(s)$ 是一个所有极点都在左半平面、所有零点不在右半平面、分母阶次高于分子阶次的有理分式。且有

$$H(j\omega)=[H(-j\omega)]^* \tag{38}$$

以及

$$S\left(\omega^2\right)=|H(j\omega)|^2=|H(-j\omega)|^2 \tag{39}$$

于是，我们得到如下**平稳随机过程的谱分解定理**。

Theorem 2.1 (有理谱分解定理) 对于类似 (33) 的有理谱密度，则必存在一个有理函数 $H(s)$，其全部极点都在左半平面，全部零点不在右半平面，并满足

$$S\left(\omega^2\right) = H(j\omega)H(-j\omega) = |H(j\omega)|^2 \tag{40}$$

Theorem 2.2 (表现定理) 对于满足 (33) 的有理谱密度 $S(\omega^2)$，一定存在一个物理上严格可实现的、渐进稳定的线性时不变系统，它的传递函数为 $H(s)$，当输入为连续时间白噪声时，其输出稳态信号的谱密度为 $S(\omega^2)$。

【证明】根据谱分解定理，对给定有理谱密度 $S(\omega^2)$，必然可分解为稳定的有理函数 $H(j\omega)$ 和 $H(-j\omega)$ 的乘积。把有理函数 $H(j\omega)$ 作为系统的脉冲传递函数，并在该系统上施加连续时间白噪声，那么由关系 (40) 可知，系统的输出就是谱密度为 $S(\omega^2)$ 的平稳过程。 □

表现定理说明，将连续时间白噪声施加到一个渐进稳定的系统，通过改变系统的脉冲传递函数，就能得到希望的有理谱密度过程。

Example 2.1 考虑如下 ω 的有理函数

$$\Phi(\omega) = \frac{\omega^2+4}{\omega^2+1} = \frac{(j\omega+2)(-j\omega+2)}{(j\omega+1)(-j\omega+1)}$$

试建立谱密度为 $\Phi(\omega)$ 的平稳随机过程的产生方法。

【解】 $\Phi(\omega)$ 有 4 种可能的分解，即

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1}, \quad H_2(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-j\omega + 1},$$
$$H_3(j\omega) = \frac{-j\omega + 2}{j\omega + 1}, \quad H_4(j\omega) = \frac{-j\omega + 2}{-j\omega + 1}.$$

其中

$$H_1(j\omega) = H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1}$$

即

$$H(s) = \frac{s + 2}{s + 1}$$

具有最小相位。即在单位白噪声过程的作用下，稳定的 LTI 系统 $H(s)$ 的输出的功率谱密度为 $\Phi(\omega)$。 □

2.1.1 平稳离散时间随机信号

根据前面的讨论，对于平稳随机序列 $\{y_k\}$，如果其自相关函数为

$$R_y(n) = Ey_k y_i, \quad n = k - i$$

那么，对应的谱密度为

$$S_y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} R_y(n)$$

式中,$z = e^{j\omega}$。

此外，对于稳定的线性时不变系统 $H(z)=\sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} h(i)$，如果输入为平稳随机序列 $\{w_k\}$，那么输出也为平稳随机序列，而且

$$S_y(\omega)=H\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{-j\omega}\right) S_w(\omega)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 S_w(\omega)$$

设平稳随机序列的谱密度为 $e^{j\omega}$ 的有理分式函数，即

$$S(\omega)=\frac{g_0 e^{jm\omega}+g_1 e^{j(m-1)\omega}+\ldots+g_m}{e^{jn\omega}+f_1 e^{j(n-1)\omega}+\ldots+f_n} e^{jk\omega} \geq 0 \tag{41}$$

其中 n, m 为偶数，且 $k=\frac{1}{2}(n-m)$。令 $z=e^{j\omega}$，可将上式进行因式分解

$$S(z)=C^2 \frac{\left(z-a_1\right) \cdots\left(z-a_m\right)}{\left(z-b_1\right) \cdots\left(z-b_n\right)} \tag{42}$$

设 α_1 是 $S(z)$ 的一个根，即 α_1 是 $S(z)$ 的一个零点，满足

$$S\left(\alpha_1\right)=0 \tag{43}$$

根据平稳随机过程自相关函数的对称性，即 $R_y(m)=R_y(-m)$，可以立即得到功率谱密度的一个性质

$$S(z)=S\left(z^{-1}\right) \tag{44}$$

因此，必有

$$S\left(\alpha_1{}^{-1}\right)=0$$

这就是说，${\alpha_1}^{-1}$ 也一定是 $S(z)$ 的一个根，或者说 ${\alpha_1}^{-1}$ 是 $S(\omega)$ 的一个零点。也就是说，两个零点 α_1 和 ${\alpha_1}^{-1}$ 总是成对出现的。

根据上面的讨论，我们便可将 $S(\omega)$ 分解成两项相乘，即

$$S(\omega)=H(z)H\left(z^{-1}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{-j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \tag{45}$$

式中:

$$H(z)=C\frac{(z-\alpha_1)\cdots\left(z-\alpha_{m/2}\right)}{(z-\beta_1)\cdots\left(z-\beta_{n/2}\right)},$$

$$H\left(z^{-1}\right)=C\frac{\left(z-\alpha_1^{-1}\right)\cdots\left(z-\alpha_{m/2}^{-1}\right)}{\left(z-\beta_1^{-1}\right)\cdots\left(z-\beta_{n/2}^{-1}\right)}.$$

若 $|\alpha_i| < 1$，则必定有 $\left|\alpha_i^{-1}\right| > 1$，$i = 1, 2, \cdots, m/2$；可见，$H(z)$ 是一个所有极点都在单位圆内、所有零点在单位圆内或单位圆上的有理分式。

于是我们得到了**平稳离散时间随机信号的谱分解定理**。

Theorem 2.3 (谱分解定理) *对于类似 (41) 的有理谱函数，则必存在一个有理函数 $H(z)$，其全部极点都在单位圆内，全部零点都在单位圆内或单位圆上，并满足*

$$S(\omega) = H\left(e^{j\omega}\right) H\left(e^{-j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \tag{46}$$

Theorem 2.4 (表现定理) *对于满足 (41) 的有理谱函数 $S(\omega)$，一定存在一个渐进稳定的线性时不变系统 $H(z)$，当输入为离散时间白噪声序列时，其稳态输出序列的谱密度为 $S(\omega)$。*

Example 2.2 对于如下有理谱密度

$$\Phi(\omega) = \frac{1.25 + \cos\omega}{1.0625 + 0.5\cos\omega} = \frac{(e^{j\omega} + 0.5)(e^{-j\omega} + 0.5)}{(e^{j\omega} + 0.25)(e^{-j\omega} + 0.25)}$$

进行谱分解。

【解】有 4 种可能的分解，其中

$$H(z) = \frac{z + 0.5}{z + 0.25}$$

因为没有单位圆之外的零点或极点，所以具有最小相位。即在单位白噪声序列的作用下，稳定的 LTI 系统 $H(z)$ 的输出的功率谱密度为 $\Phi(\omega)$。 □

Example 2.3 已知谱密度

$$S_y(\omega) = \frac{1.01 - 0.2\cos\omega}{1.25 + \cos\omega} = \frac{(e^{j\omega} - 0.1)(e^{-j\omega} - 0.1)}{(e^{j\omega} + 0.5)(e^{-j\omega} + 0.5)}$$

试对其进行谱密度分解。

【解】从形式上讲，$H(z)$ 似乎可取

$$H_1(z) = \frac{z - 0.1}{z + 0.5}$$

$$H_2(z) = \frac{z^{-1} - 0.1}{z^{-1} + 0.5} = \frac{1 - 0.1z}{1 + 0.5z} = -0.2\frac{z - 10}{z + 2}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - 0.1z}{z + 0.5} = -0.1\frac{z - 10}{z + 0.5}$$

$$H_4(z) = \frac{z - 0.1}{1 + 0.5z} = 2\frac{z - 0.1}{z + 2}$$

但 $H_2(z)$ 与 $H_4(z)$ 有极点在单位圆外，相应的系统是不稳定的，因而不能作为合理的谱分解式。当输入为同一个离散时间白噪声 $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ 时，$H_1(z)$ 与 $H_3(z)$ 对应的响应是不同的，但两个响应的稳态分量的谱密度却是完全相同的。从原则上来讲，$H_1(z)$ 与 $H_3(z)$ 均可作为谱分解式，但考虑到 $H_1(z)$ 在单位圆外没有零点，即通常所谓的最小相位系统，故一般选 $H_1(z)$ 作谱分解式。

设 $\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ 是服从 $\mathcal{N}(0, \sqrt{2\pi})$ 分布的独立随机序列，则

$$S_w(\omega) = 1$$

将 $\{w_k\}$ 作用于 $H_1(z)$，记其输出为 y_k，那么有

$$y_{k+1} + 0.5y_k = w_{k+1} - 0.1w_k$$

上述系统输出 y_k 的稳态解就具有题设之谱密度。

注意到

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{z-0.1}{z+0.5} = 1 + \frac{-0.6}{z+0.5} \\ &= 1 + 1.2\sum_{i=1}^{+\infty}(-0.5)^i z^{-i} \end{aligned}$$

因此，y_k 可表示为现在的和过去的所有输入量的线性组合，即

$$
\begin{aligned}
y_k &= \sum_{i=1}^{+\infty} h(i) w_{k-i} \\
&= w_k + 1.2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-0.5)^i w_{k-i}
\end{aligned}
$$

上式表明，该系统的输出可以表示为输入的级数形式。 $\square$

3. 离散时间随机系统的多项式表示

3.1 平稳随机过程对应系统

首先考虑一个已知有理谱密度为 $\Phi_y(e^{jw})$ 的离散时间随机过程 y_k，进行谱分解后可以得到

$$\Phi_y\left(e^{jw}\right) = H\left(e^{jw}\right) qH\left(e^{-jw}\right) \tag{47}$$

谱分解定理还告诉我们 $H(e^{jw})$ 是稳定的，其所有的零点都位于单位圆内部或是在单位圆上。

我们假设 $H(e^{jw})$ 是最小相位的（即所有零极点都在单位圆内），并具有相对阶 0，且分子和分母都为首一多项式。令 $z = e^{jw}$，可以通过选择合适的 q 使得首项系数为 1，那么 $H(z)$ 就可以表示为下面的多项式形式：

$$H(z) = \frac{z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} \tag{48}$$

进一步由表现定理，设 w_k 是均值为 0 方差为 q 的白噪声，则有

$$y_k = \frac{z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} w_k \tag{49}$$

说明一个离散时间随机系统的输入-输出关系可以通过类多项式形式表示。

在上述讨论中，由于 w_k 是白噪声，属于随机过程的扰动，体现了环境对过程的影响。现在我们考虑对系统加入控制输入 u_k，因为系统是线性的，所以可用叠加原理，并把所有扰动都表示为作用在输出上的单一扰动。因此，离散时间随机系统可用下述模型来表示：

$$
\begin{aligned}
y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} =& b_0 u_{k-d} + b_1 u_{k-d-1} + \cdots + b_m u_{k-d-m} \\
&+ w_k + c_1 w_{k-1} + \cdots + c_n w_{k-n}
\end{aligned} \tag{50}
$$

为简化分析，引入单位后向移位算子

$$
y_{k-1} = z^{-1} y_k \tag{51}
$$

将上述算子引入 (50)，于是就得到离散线性随机系统的多项式表示：

$$A\left(z^{-1}\right) y_k = z^{-d} B\left(z^{-1}\right) u_k + C\left(z^{-1}\right) w_k \tag{52}$$

其中，$u_k \in R$, $y_k \in R$ 分别是控制输入和测量输出，$w_k \in R$ 是均值为 0 方差为 q 的白噪声。(52) 中的系数分别为

$$A\left(z^{-1}\right) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n} \tag{53}$$

$$B\left(z^{-1}\right) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}, \qquad b_0 \neq 0 \tag{54}$$

$$C\left(z^{-1}\right) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n} \tag{55}$$

可见，$A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 都是延时算子 z^{-1} 的多项式。此外，$d \geq 0$ 表示控制延迟，通常假设 $C(z^{-1})$ 是稳定的。

对离散线性随机系统模型 (52)，一般有两点基本假设：

(1) 噪声 w_k 是独立同分布高斯白噪声，$w_k \sim \mathcal{N}(0,1)$;

(2) 噪声 w_k 和 y_l 互相独立，即当 $k > l$ 时，$E\{w_k y_l\} = 0$).

在上述假设 (1) 下，由 (52) 可知，因为存在高斯白噪声 w_k，系统输出 y_k 也是随机过程，同时也是高斯的。

3.2 状态方程对应系统

在之前的讨论中，我们知道离散时间系统的传递函数表达可以和多项式表达等效。下面考虑单输入-单输出系统的状态空间表示

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}u_k + \boldsymbol{J}e_k \tag{56}$$

$$y_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + v_k \tag{57}$$

其中，$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是常系数矩阵，过程噪声 $e_k \sim \mathcal{N}(0, Q')$，量测噪声 $v_k \sim \mathcal{N}(0, R')$，且噪声 e_k 和噪声 v_k 相互独立。

利用 z 变换，可将上述状态空间方程转换为传递函数形式

$$Y(z) = \boldsymbol{H}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{G}U(z) + \boldsymbol{H}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{J}E(z) + V(z) \tag{58}$$

用 $H_E(Z)$ 表示 $E(z)$ 的系数，(58) 中的噪声项为 $H_E(z)E(z)+V(z)$。然后进行谱分解，可以确定对应的 q 和最小相位的 $H(z)$：

$$H\left(e^{jw}\right)qH\left(e^{-jw}\right)=H_E\left(e^{jw}\right)Q^{\prime}H_E\left(e^{-jw}\right)+R^{\prime} \tag{59}$$

定义

$$H(z)=\frac{C_1(z)}{A_1(z)} \tag{60}$$

其中 $C_1(z)$ 和 $A_1(z)$ 首一多项式。同时令

$$A_2(z)=|z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}| \tag{61}$$

$$B_2(z)=\boldsymbol{H}\left[adj(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})\right]\boldsymbol{G} \tag{62}$$

那么 (58) 可被写为

$$Y(z)=\frac{B_2(z)}{A_2(z)}U(z)+\frac{C_1(z)}{A_1(z)}W(z) \tag{63}$$

其中，等效噪声 $w_k\sim\mathcal{N}(0,\ q)$ 是白噪声，其作用等效于 e_k 和 v_k。

假设 $deg\left[A_1(z)\right]=deg\left[C_1(z)\right]=n_1$, $deg\left[A_2(z)\right]=n_2$, $deg\left[B_2(z)\right]=m_2$, 并令

$$A\left(z^{-1}\right)=z^{-(n_1+n_2)}A_1(z)A_2(z) \tag{64}$$

$$B\left(z^{-1}\right)=z^{-(n_1+m_2)}A_1(z)B_2(z) \tag{65}$$

$$C\left(z^{-1}\right)=z^{-(n_1+n_2)}C_1(z)A_2(z) \tag{66}$$

那么，(63) 可以表示为 (52) 形式，即

$$A\left(z^{-1}\right) y_k = z^{-d} B\left(z^{-1}\right) u_k + C\left(z^{-1}\right) w_k$$

其中的控制延迟为

$$d = n_2 - m_2 \tag{67}$$

根据上述多项式形式的数学模型，可以方便地进行离散时间随机系统的分析与设计。

4. 最小方差预测

在讨论最小方差控制问题之前，我们首先讨论最小方差预测问题。在这里我们为随机系统的输出找到一个最优的 d 步提前预测，也就是说我们希望通过第 k 时刻及其之前的输入输出信息，在最小方差的意义上预测 $k+d$ 时刻的输出 y_{k+d}。

我们假设 $A(z^{-1})$ 是稳定的，为了解决最小方差预测问题，我们首先对式（52）中的 $A(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 进行长除法，从而获得需要的商 $F(z^{-1})$ 和余数 $z^{-d}G(z^{-1})$：

$$\begin{array}{r|l} & \quad F(z^{-1}) \\ \hline A(z^{-1}) & \quad C(z^{-1}) \\ & \quad \vdots \\ \hline & z^{-d}G(z^{-1}) \end{array} \tag{68}$$

除法进行 d 步，直到 z^{-d} 可以从余数中分解出来，从而可以得到 $G(z^{-1})$。通过上式，可以得

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) = C(z^{-1}) \tag{69}$$

上式称为 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的丢番图方程（Diophantine Equation）。该方程的解不是唯一的，但由长除法确定的特解 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 有如下形式:

$$F\left(z^{-1}\right)=1+f_1 z^{-1}+\ldots+f_{d-1} z^{-(d-1)} \tag{70}$$

$$G\left(z^{-1}\right)=g_0+g_1 z^{-1}+\ldots+g_{n-1} z^{-(n-1)} \tag{71}$$

注意，其中 $F(z^{-1})$ 的最高阶次为 $(d-1)$，与式 (69) 中 z^{-d} 相对应。

将式 (52) 左右端同乘以 $z^d F(z^{-1})$ 得

$$A(z^{-1})F(z^{-1})y_{k+d}=B(z^{-1})F(z^{-1})u_k+C(z^{-1})F(z^{-1})w_{k+d} \tag{72}$$

带入丢番图方程 (69)，

$$C(z^{-1})y_{k+d} = z^{-d}G(z^{-1})y_{k+d} + B(z^{-1})F(z^{-1})u_k + C(z^{-1})F(z^{-1})w_{k+d}$$

等式两边同时除以 $C\left(z^{-1}\right)$，

$$y_{k+d} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y_k + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u_k + F(z^{-1})w_{k+d} \tag{73}$$

这是一个重要的表达式。

式 (73) 右端第 1 项是 $\{y_k, y_{k-1}, \cdots\}$ 的线性组合,第 2 项是 $\{u_k, u_{k-1}, \cdots\}$ 的线性组合。第 3 项是 $\{w_{k+1}, w_{k+2}, \cdots, w_{k+d}\}$ 的线性函数，即

$$F\left(z^{-1}\right)w_{k+d} = w_{k+d} + f_1 w_{k+d-1} + \ldots + f_{d-1}w_{k+1}$$

对于容许控制（物理上可实现的控制），式 (73) 右端第 2 项可以认为是 $\{y_k, y_{k-1}, \cdots\}$ 的（线性）组合。因此，式 (73) 右端第 3 项与前面两项相互独立。

记 $\boldsymbol{Y}^k = \{y_k, y_{k-1}, \cdots\}$，那么 d 步最优预测，也称为最小方差预测，即为

$$\widehat{y}_{k+d|k} = E[y_{k+d}|\boldsymbol{Y}^k]$$

考虑到

$$\widetilde{y}_{k+d|k} \triangleq y_{k+d} - \widehat{y}_{k+d|k} \tag{74}$$

有

$$j_k = E\left(\widetilde{y}_{k+d|k}^2\right) = E\left[\left(y_{k+d} - \widehat{y}_{k+d|k}\right)^2\right] \tag{75}$$

将 (73) 带入 (75)，可导出

$$\begin{aligned} j_k &= E\left[\left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k - \widehat{y}_{k+d|k}\right) + Fw_{k+d}\right]^2 \\ &= E\left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k - \widehat{y}_{k+d|k}\right)^2 + E\left(Fw_{k+d}\right)^2 \end{aligned}$$

在给定 $\boldsymbol{Y}^k$ 条件下，上式可以写为

$$j_k = \left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k - \widehat{y}_{k+d|k}\right)^2 + E\left(Fw_{k+d}\right)^2$$

由 $j_k \Rightarrow \min$ 可导出

$$\widehat{y}_{k+d|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y_k + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u_k \tag{76}$$

而最优预测的均方误差为

$$\begin{aligned} j_k^* &= E\left(F w_{k+d}\right)^2 \\ &= E\left(w_{k+d} + f_1 w_{k+d-1} + \ldots + f_{d-1} w_{k+1}\right)^2 \\ &= E\left(w_{k+d}^2\right) + f_1^2 E\left(w_{k+d-1}^2\right) + \ldots + f_{d-1}^2 E\left(w_{k+1}^2\right) \end{aligned}$$

根据白噪声的特性，交叉项不存在了。注意到 w_k 的均值为 0，方差为 q，最后可得最小均方误差为

$$j_k^* = q\left(1 + f_1^2 + \ldots + f_{d-1}^2\right) \tag{77}$$

而预测误差为

$$\widetilde{y}_{k+d|k} = F(z^{-1})w_{k+d} \tag{78}$$

[注] 最优预测 (76) 式也可以直接从静态估计理论导出：对 (73) 式两端取给定 $\boldsymbol{Y}^k$ 条件下的数学期望。

综上，最优预测（最小方差预测）是输入为 u_k 和 y_k 的线性确定性系统的输出，预测误差是噪声序列的滑动平均值。如前所述，我们已经假设 $C(z^{-1})$ 是稳定的，所以预测器是一个稳定的系统。

如图1 所示，预测器的输出可以被分解为两部分

$$y_{k+d} = \widehat{y}_{k+d|k} + \widetilde{y}_{k+d|k} \tag{79}$$

其中预测值仅依赖于 k 时刻及其之前的值，而预测误差仅依赖于 k 时刻之后的噪声值。

Example 4.1 考虑差分方程描述的系统

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} = b_0 u_{k-d} + w_k + c_1 w_{k-1}$$

其中，白噪声 $w_k \sim \mathcal{N}(0,\ q)$。该系统也可以表达为

$$\left(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right) y_k = z^{-d} b_0 u_k + \left(1 + c_1 z^{-1}\right) w_k$$

试建立该系统的一步和二步预测器。

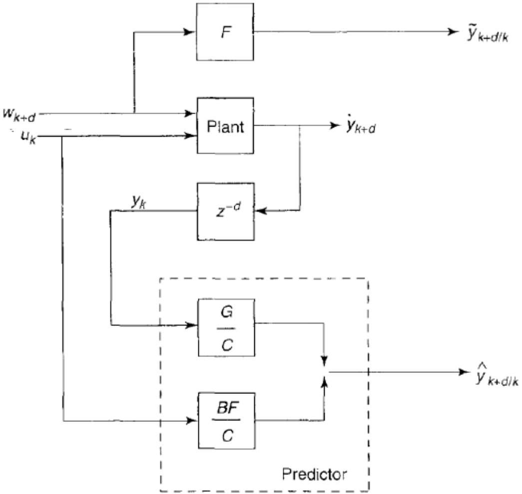

Figure 1: d 步预测器

【解】(a) 一步预测器: $d=1$

注意到

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{1+c_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=1+z^{-1}\frac{(c_1-a_1)-a_2z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

对比 Diophantine 方程 (69)

$$A(z^{-1})F(z^{-1})+z^{-d}G(z^{-1})=C(z^{-1})$$

可知

$$F(z^{-1})=1,\quad G(z^{-1})=(c_1-a_1)-a_2z^{-1}$$

此外

$$B(z^{-1})=b_0,\quad C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}$$

由最小方程预测器 (76) 可知

$$C(z^{-1})\widehat{y}_{k+d|k} = G(z^{-1})y_k + B(z^{-1})F(z^{-1})u_k$$

即

$$(1 + c_1 z^{-1})\widehat{y}_{k+1|k} = [(c_1 - a_1) - a_2 z^{-1}]y_k + b_0 u_k$$

也可以表达为递推形式

$$\widehat{y}_{k+1|k} = -c_1\widehat{y}_{k|k-1} + (c_1 - a_1)y_k - a_2 y_{k-1} + b_0 u_k, \quad k \geq 0$$

由于 $C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1}$ 是稳定的，可以任意地选取初始值，例如

$$\hat{y}_{0|-1} = 0, \quad y_{-1} = 0$$

此外，我们还可以求得一步预测的最小均方误差为 $j_k^* = q$。

（b）二步预测器：$d = 2$

同样地，计算

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{1 + c_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = 1 + z^{-1}\frac{(c_1 - a_1) - a_2 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$= 1 + (c_1 - a_1) z^{-1} + z^{-2}\frac{[-a_2 - a_1(c_1 - a_1)] - a_2(c_1 - a_1) z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

对比 Diophantine 方程 (69)，可知

$$F(z^{-1}) = 1 + (c_1 - a_1) z^{-1}$$

$$G(z^{-1}) = [-a_2 - a_1(c_1 - a_1)] - a_2(c_1 - a_1) z^{-1}$$

同样代入 $C(z^{-1})\widehat{y}_{k+d|k} = G(z^{-1})y_k + B(z^{-1})F(z^{-1})u_k$，由此可知此时的递推形式二步预测器为

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{k+2|k} =& - c_1\widehat{y}_{k+1|k-1} - \left[a_2 + a_1\left(c_1 - a_1\right)\right]y_k \\ & - a_2\left(c_1 - a_1\right)y_{k-1} + b_0u_k + b_0\left(c_1 - a_1\right)u_{k-1}\end{aligned}$$

而二步预测的均方误差为

$$j_k^* = E[F(z^{-1})w_{k+2}]^2 = q + \left(c_1 - a_1\right)^2 q$$

二步预测器需要的初值也可以任意给定。 □

在这个算例中，我们还可以进行更多步的预测，但预测的均方误差也会进一步增加。此外，$G(z^{-1})$ 的次数一般为 $n-1$，而 $F(z^{-1})$ 的次数 $d-1$

会随着延迟的增加而增加。因此，进行 d 步预测需要之前 $n-1$ 步的输出值和之前 $d-1$ 步的输入值。

Example 4.2 已知

$$y_k + 0.3y_{k-1} = w_k + 0.4w_{k-1} - 0.07w_{k-2} - 0.01w_{k-3}$$

的稳态解为 $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$，$\{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ 为零均值单位白噪声。求 y_k 的一步、二步最小方差预测。

【解】由题设，有

$$y_k = \frac{1+0.4z^{-1}-0.07z^{-2}-0.01z^{-3}}{1+0.3z^{-1}} w_k = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} w_k$$

容易导出，该系统的 3 个极点分别为 $\{0,0,-0.3\}$，3 个零点分别为 $\{-0.1,0.2,-0.5\}$。因此，这是是一个最小相位系统。

用长除法计算 $\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ 如下:

$$
\begin{array}{rll}
 & 1+0.1z^{-1} & \leftarrow F_1(z^{-1}), F_2(z^{-1}) \\
1+0.3z^{-1} & \overline{\big) \; 1+0.4z^{-1}-0.07z^{-2}-0.01z^{-3}} & \\
 & 1+0.3z^{-1} & \\
\hline
 & \quad 0.1z^{-1}-0.07z^{-2}-0.01z^{-3} & \leftarrow G_1(z^{-1}) \\
 & \quad 0.1z^{-1}+0.03z^{-2} & \\
\hline
 & \quad\quad -0.10z^{-2}-0.01z^{-3} & \leftarrow G_2(z^{-1})
\end{array}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
C(z^{-1}) &= A(z^{-1})F_1(z^{-1}) + G_1(z^{-1}) \\
&= A(z^{-1})F_2(z^{-1}) + G_2(z^{-1})
\end{aligned}
$$

一步预测: $d = 1$

根据上述长除法，有

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = F_1(z^{-1}) + \frac{G_1(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

其中,

$$F_1(z^{-1}) = 1 \quad \{= F(z^{-1})\}$$

$$G_1(z^{-1}) = z^{-1}0.1 - 0.07z^{-1} - 0.01z^{-2}\{= z^{-1}G(z^{-1})\}$$

由 $\hat{y}_{k+d|k} = \frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k$，可导出

$$\hat{y}_{k+1|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y_k = \frac{0.1 - 0.07z^{-1} - 0.01z^{-2}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3}}y_k$$

同时由

$$E\tilde{y}^2_{k+d|k} = E[Fw_{k+d}]^2 = q[1 + f_1^2 + \quad + f_{d-1}^2]^2$$

可知 $E\tilde{y}^2_{k+1|k} = 1$。

二步预测: $d = 2$

同样地

$$\frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})} = F_2(z^{-1}) + \frac{G_2(z^{-1})}{A(z^{-1}}$$

其中

$$F_2(z^{-1}) = 1 + 0.1z^{-1}\left(= F(z^{-1})\right)$$

$$G_2(z^{-1}) = z^{-2}(-0.10 - 0.01z^{-1})\left(= z^{-2}G(z^{-1})\right)$$

类似地，可导出

$$\hat{y}_{k+2|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y_k = \frac{-0.10 - 0.01z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3}} y_k$$

$$E\tilde{y}_{k+2|k}^2 = E[F(z^{-1})w_{k+2}]^2 = 1 + 0.1^2 = 1.01$$

$\square$

Example 4.3 考虑如下系统：

$$(1 - 0.8z^{-1})y_k = 0.2u_{k-2} + (1 + 0.7z^{-1})v_k$$

其中，白噪声 $\{v_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 的常值方差为 σ^2。试确定该系统的最小方差预测。

【解】显然 $A(z^{-1})=1-0.8z^{-1}$ 和 $C(z^{-1})=1+0.7z^{-1}$ 是 z 的稳定多项式，$d=2$，因此若设

$$F(z^{-1})=1+f_1z^{-1},\quad G(z^{-1})=g_0$$

根据 $A(z^{-1})F(z^{-1})+z^{-d}G(z^{-1})=C(z^{-1})$，有

$$1+0.7z^{-1}=(1+f_1z^{-1})(1-0.8z^{-1})+z^{-2}g_0$$

比较上式两端 z^{-1} 相同次幂的系数，可得

$$f_1=1.5,\quad g_0=1.2$$

将 $F(z^{-1})=1+1.5z^{-1},G(z^{-1})=1.2$ 和 $B(z^{-1})$、$C(z^{-1})$ 表达式（76），那

么可得系统的最小方差预测为

$$\hat{y}_{k+2|k} = \frac{1.2y_k + (0.2 + 0.3z^{-1})u_k}{1 + 0.7z^{-1}}$$

也可以表达为

$$\hat{y}_{k+2|k} = -0.7\hat{y}_{k+1|k-1} + 1.2y_k + 0.2u_k + 0.3u_{k-1}$$

对应的预测误差为

$$\tilde{y}_{k+2|k} = F(z^{-1})v_{k+2} = v_{k+2} + 1.5v_{k+1}$$

预测误差方差为

$$E\tilde{y}_{k+2|k}^2 = 3.25\sigma^2.$$

□

5. 最小方差控制

考虑多项式描述的随机控制系统:

$$A\left(z^{-1}\right) y_k = z^{-d} B\left(z^{-1}\right) u_k + C\left(z^{-1}\right) w_k \tag{80}$$

其中,白噪声 $w_k \sim \mathcal{N}(0, q)$。我们的目标是: 通过选择控制策略 u_k,使得系统输出 d 步预测 $\widehat{y}_{k+d|k}$ 的方差尽可能地小。显然,这属于一个调节问题。

5.1 最优控制策略

根据系统控制的目标，我们可选择如下代价函数：

$$J(u_k) = \mathsf{var}\left[y_{k+d}|\boldsymbol{Y}^k\right] \tag{81}$$

根据上面最小方差预测中的讨论，我们有

$$J(u_k) = E\left(y_{k+d}^2\right) = E\left[\left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k\right) + Fw_{k+d}\right]^2 \tag{82}$$

在当前时刻 k，构造控制策略 u_k 的可能信息仅为 $\{y_k, y_{k-1}, \cdots\}$。因此，代价函数 (82) 中右端小括号中的项仅依赖于 $\{w_k, w_{k-1}, \cdots\}$。而

$F\left(z^{-1}\right)w_{k+d}$ 仅依赖于 $\{w_{k+1}, w_{k+2}, \cdots, w_{k+d}\}$。考虑到两部分是相互独立的，因此有

$$J(u_k) = E\left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k\right)^2 + E\left(Fw_{k+d}\right)^2 \tag{83}$$

给定 $\boldsymbol{Y}^k$ 条件下，即为

$$J(u_k) = \left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k\right)^2 + E\left(Fw_{k+d}\right)^2$$

由此可得最优控制策略，即最小方差控制策略，为

$$u_k = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1})}y_k \tag{84}$$

最优代价则为

$$J^*(u_k) = j_k^* = E\left[F\left(z^{-1}\right)w_{k+d}\right]^2$$
$$= q\left(1 + f_1^2 + \ldots + f_{d-1}^2\right)$$

与最小方差预测中的均方误差 (77) 相同。

上述最小方差控制的结构如图 2 所示，其中增加了参考信号 s_k。由于反馈回路是 z^{-1} 的函数，包含了动态过程，因此是一个动态输出反馈。也可以将其视为一个单回路调节器，由于没有前馈项，所以只能改变极点，而不能改变零点。

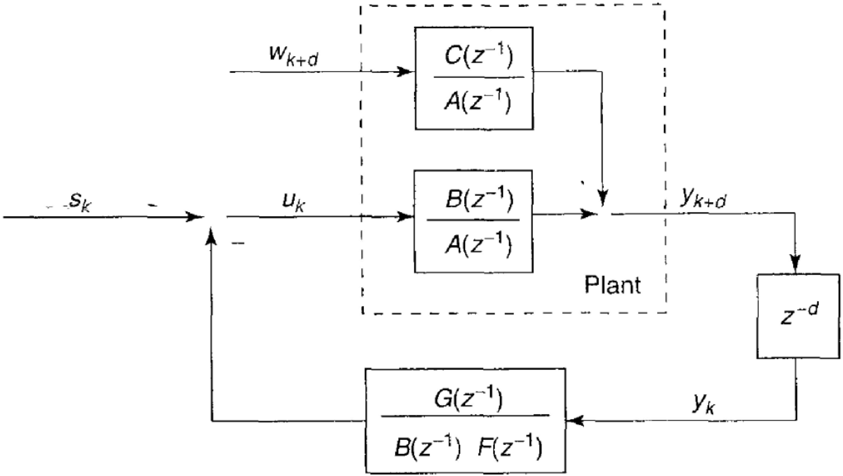

Figure 2: 最小方差控制器

回顾最小方差预测

$$\widehat{y}_{k+d|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y_k + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u_k$$

不难发现，可以简单地将 d 步预测 $\widehat{y}_{k+d|k}$ 置为零，从而得到最小方差控制 (84) 给出的最优控制 u_k。最小方差控制输出结果的均方值 (82) 也完全等于最小方差预测的均方误差。因此，最小方差控制 (84) 隐含地包括了最小方差预测。

5.2 闭环系统分析

这里简单讨论一下在最小方差控制作用下的闭环系统。把控制策略 (84) 代入系统 (80)，则噪声 w_k 与输出 y_k 的关系可表示为

$$\left(A + z^{-d}\frac{BG}{BF}\right) y_k = C w_k \tag{85}$$

整理可得

$$y_k = \frac{BFC}{B\left(AF + z^{-d}G\right)} w_k \tag{86}$$

分母部分代入丢番图方程，可得

$$y_k = \frac{BFC}{BC} w_k \tag{87}$$

如前所述，我们一般都假设 $C(z^{-1})$ 是稳定的。当 $B(z^{-1})$ 是稳定的，即 $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ 是最小相位的，那么上式分子、分母可以同时消去 $B(z^{-1})$ $C(z^{-1})$，进而得到

$$y_k = F\left(z^{-1}\right) w_k \tag{88}$$

这即为调节误差。因此，最小方差控制的调节误差就等于最小方差预测的预测误差。

式 (88) 还表明，如果 w_k 的均值为零，那么闭环系统（这里指参考输入 s_k 为零）的输出 y_k 的均值也为零。因此，代价函数 (82) 的最优值 j_k^* 即为闭环系统输出的方差，这也证明了控制策略的确是最小方差控制。

下面，我们来考察参考输入 s_k 和 y_{k+d} 之间的闭环传递关系。从图 2可得

$$y_{k+d} = \frac{B/A}{1 + GBz^{-d}/BAF} s_k$$

通分后得

$$y_{k+d} = \frac{B^2 F}{B\left(AF + z^{-d}G\right)} s_k \tag{89}$$

代入丢番图方程后，变为

$$y_{k+d} = \frac{B^2 F}{BC} s_k \tag{90}$$

由此可知闭环特征多项式为

$$\Delta^{cl}(z) = B\left(z^{-1}\right) C\left(z^{-1}\right) z^{m+n} \tag{91}$$

可见，如果对象 $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ 为最小相位，那么闭环系统是稳定的 (我们假设 $C(z^{-1})$ 是稳定的)。此时，我们可以消去 $B\left(z^{-1}\right)$，从而得到

$$y_{k+d}=\frac{B\left(z^{-1}\right) F\left(z^{-1}\right)}{C\left(z^{-1}\right)} s_k \tag{92}$$

上述结果表明，闭环极点就是噪声多项式 $C\left(z^{-1}\right)$ 的零点。

Example 5.1 求例4.1中的最小方差控制。

【解】

(a) 一步控制器：$d=1$

将一步预测输出设为零，即

$$(1+c_1z^{-1})\widehat{y}_{k+1|k}=[(c_1-a_1)-a_2z^{-1}]y_k+b_0u_k=0$$

即可解算出一步控制器：

$$u_k=\frac{-(c_1-a_1)}{b_0}y_k+\frac{a_2}{b_0}y_{k-1} \tag{93}$$

在一步控制器的作用下，调节误差由 (88) 给出。即

$$y_k=F(z^{-1})w_k=w_k$$

调节误差方差为

$$j_k^* = E[F(z^{-1})w_{k+1}]^2 = q$$

(a) 二步控制器：$d=2$

递归地令二步预测输出为零，即在

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{k+2|k} = &- c_1\widehat{y}_{k+1|k-1} - \left[a_2 + a_1\left(c_1 - a_1\right)\right]y_k \\ &- a_2\left(c_1 - a_1\right)y_{k-1} + b_0u_k + b_0\left(c_1 - a_1\right)u_{k-1}\end{aligned}$$

中，取 $\widehat{y}_{k+2|k} = \widehat{y}_{k+1|k-1} = 0$，从而导出

$$u_k = -\left(c_1 - a_1\right)u_{k-1} + \frac{a_2 + a_1\left(c_1 - a_1\right)}{b_0}y_k + \frac{a_2\left(c_1 - a_1\right)}{b_0}y_{k-1}$$

此时，调节误差为

$$y_k = w_k + (c_1 - a_1)\, w_{k-1}$$

二步调节的方差即二步预测的均方误差，为

$$j_k^* = E[F(z^{-1})w_{k+2}]^2 = q + (c_1 - a_1)^2\, q$$

可见，调节误差方差随控制延迟而增加。 $\square$

Example 5.2 求例4.3中的最小方差控制。

【解】在例4.3中，我们已经求出 $F(z^{-1})=1+1.5z^{-1}, G(z^{-1})=1.2$，此外已知 $B(z^{-1})=0.2$。因此，根据 (84) 可知系统的最小方差控制为

$$u_k=-\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1})}y_k=-\frac{1.2y_k}{0.2+0.3z^{-1}}$$

也可以写为差分方差形式

$$u_k=-1.5u_{k-1}-6y_k$$

在上述控制器的作用下，系统的调节误差为

$$y_k=F(z^{-1})v_k=v_k+1.5v_{k-1}$$

系统的最优代价，即最小均方误差，为

$$J^*(u_k) = j_k^* = E\left[F\left(z^{-1}\right)v_{k+d}\right]^2|_{d=2}$$
$$= \sigma^2(1+1.5^2) = 3.25\sigma^2$$

□

总结起来，最小方差控制具有如下性质：

- 最小方差控制策略 u_k 是 $\{u_{k-1}, u_{k-2}, \cdots, u_{k-m-d+1}\}$ 与 $\{y_k, y_{k-1}, \cdots, y_{k-n+1}\}$ 的线性组合，也即为 $\{y_k, y_{k-1}, \cdots\}$ 的线性组合。
- 被控量的最小方差（均方误差）是一与时间无关的常数。

- 当采用最小方差控制策略时，被控量为 $y_k = F(z^{-1})w_k = w_k + f_1 w_{k-1} + \cdots + f_{d-1} w_{k-d+1}$ 这是一个零均值 $d-1$ 阶平均滑动过程。
- 最小方差控制的输出 y_{k+d} 即为最小方差预测的误差 $\tilde{y}_{k+d|k}$。
- 当系统噪声的高斯假设换为二阶矩假设后，上述最小方差控制为线性最小方差控制。

至此，我们都隐含要求 $C(z^{-1})$ 是稳定的，这保证了最小方差预测 $y_{k+d|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y_k + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u_k$ 的稳定性。如果 $C(z^{-1})$ 是不稳定的，可以应用谱分解理论，将单位园外的零点用其共轭零点代替来获得稳定的最小方差预测，限于篇幅，在此不再深入讨论了。

结合

$$y_{k+d|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})} y_k + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})} u_k$$

与

$$u_k = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1})} y_k$$

可知，最小方差控制要求 $B(z^{-1})$、$C(z^{-1})$ 均是稳定的。当 $B(z^{-1})$ 不稳定时，即系统是非最小相位系统，需要采用下面介绍的广义最小方差控制。

6. 广义最小方差控制

上一节研究了最小方差控制，采用了朴素的代价函数 (81)，即

$$J(u_k) = \mathsf{var}\ [y_{k+d}|\boldsymbol{Y}^k]$$

本节研究可能的扩展，将考虑控制能耗、过程品质等附加要求。

首先回顾本章研究的对象，即线性时不变随机系统。仍然采用如下描述：

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + C(z^{-1})w_k \tag{94}$$

其中，$w_k \sim N(0,q)$ 是白噪声干扰。此外

$$A\left(z^{-1}\right) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}$$
$$B\left(z^{-1}\right) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}, \qquad b_0 \neq 0$$
$$C\left(z^{-1}\right) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n}$$

6.1 代价函数扩展

不同于最小方差控制中采用的代价函数 (81)，我们将采用如下更加一般的形式：

$$J(u_k) = E\{\left[P(z^{-1})y_{k+d} - Q(z^{-1})s_k\right]^2 + \left[R(z^{-1})u_k\right]^2 | \boldsymbol{Y}^k\} \tag{95}$$

其中，s_k 是给定的参考信号; P, Q, R 为给定的加权多项式，分别为

$$P\left(z^{-1}\right) = 1 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_{n_p} z^{-n_P} \tag{96}$$

$$Q\left(z^{-1}\right) = q_0 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n_Q} z^{-n_Q} \tag{97}$$

$$R\left(z^{-1}\right) = r_0 + r_1 z^{-1} + \ldots + r_{n_R} z^{-n_R} \tag{98}$$

这个代价函数 $J(u_k)$，也可以称为成本指标，可以帮助我们获得不同要求下的闭环控制。下面对常见的代价函数进行简单讨论。

6.1.1 最省能量控制

在代价函数 (95) 中，简单地取

$$P = 1, Q = 0, R = r_0$$

代价函数化为

$$J(u_k) = E[y_{k+d}^2 + {r_0}^2 {u_k}^2 | \boldsymbol{Y}^k] \tag{99}$$

显然，这表示要求输出误差尽量小的同时，希望控制能耗最省，权重系数 r_0 反映了控制精度与控制能耗之间的平衡。

6.1.2 最小变化率控制

有时我们希望控制信号尽量平滑，即控制量变化率最小，我们可以取

$$P=1, Q=0, R=r_0\left(1-z^{-1}\right)$$

此时，代价函数化为

$$J(u_k)=E[y_{k+d}^2+{r_0}^2(u_k-u_{k-1})^2|\boldsymbol{Y}^k] \tag{100}$$

在以上两种情况中，我们都假设了系统参考输入信号为零，相当于调节器问题。

6.1.3 最优跟踪控制

有时我们希望系统的输出跟踪给定的参考输入信号 s_k，可以选择

$$P = Q = 1, \quad R = r_0$$

对应的代价函数为

$$J(u_k) = E[(y_{k+d} - s_k)^2 + {r_0}^2 {u_k}^2 | \boldsymbol{Y}^k] \tag{101}$$

6.1.4 模型跟踪控制

代价函数 (95) 表示了一般情况下的模型跟踪控制，相当于要求控制对象 $B(z^{-1})z^{-d}/A(z^{-1})$ 表现出给定模型那样的行为。

考虑 $R=0$，此时控制器力图使得

$$P(z^{-1})y_{k+d}=Q(z^{-1})s_k \tag{102}$$

也可以表示为

$$y_k=\frac{Q\left(z^{-1}\right)z^{-d}}{P\left(z^{-1}\right)}s_k \tag{103}$$

相对于使系统的的输出 y_k 跟踪模型 $Q\left(z^{-1}\right)z^{-d}/P\left(z^{-1}\right)$ 在输入 s_k 作用下的输出。因此，为了获得满意的跟踪控制效果，我们只需合理地选取 $Q\left(z^{-1}\right)$ 和 $P\left(z^{-1}\right)$。

最后，如果取 $P=1,Q=0,R=0$，那么代价指标 $\left(J(u_{k)}\right)$ 就简化为 (81)。也就是说，前面讨论的最小方差控制是现在讨论的广义最小方差控制的特例。

6.2 广义最小方差控制策略

下面讨论最优控制策略的求解问题。显然，可实现的控制策略 u_k 只能依赖于 $\{u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots; y_k, y_{k-1}, \ldots\}$。由于代价函数 (95) 不仅依赖于 u_k，而且依赖于 y_{k+d}，y_{k+d} 又取决于 u_k，因此我们不能简单地对代价函数 $J(u_k)$ 求微分来确定最优控制策略 u_k。为此，我们将首先寻找一个对 y_{k+j} 的最优 j 步预测 $(j \le d)$。

进一步考察代价函数 (95)

$$J(u_k) = E\{\left[P(z^{-1})y_{k+d} - Q(z^{-1})s_k\right]^2 + \left[R(z^{-1})u_k\right]^2 |\boldsymbol{Y}^k\}$$

可以看出，根据 $P(z^{-1})$ 的阶次 n_p，出现了 $y_{k+d}, y_{k+d-1}, \ldots, y_{k+d-n_p}$。对于当前时刻 k，需要分别给出这些量的估计值。

根据前面的最小方差预测，容易知道

$$\widehat{y}_{k+j|k} = \frac{G_j}{C} y_k + \frac{BF_j}{C} u_{k-d+j}, \quad 0 < j \leq d \tag{104}$$

对应的预测误差为

$$\widetilde{y}_{k+j|k} = F_j w_{k+d} \tag{105}$$

均方误差为

$$E\left(\widetilde{y}_{k+j|k}^2\right) = q\left(1 + f_1^2 + \ldots + f_{j-1}^2\right) \tag{106}$$

其中，f_i 是 $F_j\left(z^{-1}\right)$ 的系数。而 G_j、F_j 由对应的丢番图方程确定：

$$AF_j + z^{-d}G_j = C \tag{107}$$

其中

$$F_j\left(z^{-1}\right) = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{j-1} z^{-(j-1)} \tag{108}$$

一般地

$$y_{k+j} = \widehat{y}_{k+j|k} + \widetilde{y}_{k+j|k}, \quad 0 < j \leq d \tag{109}$$

其中，$\widehat{y}_{k+j|k}$ 和 $\widetilde{y}_{k+j|k}$ 相互独立。对于 $j \leq 0$，显然有

$$\widehat{y}_{k+j|k} = y_{k+j}, \quad j \leq 0 \tag{110}$$

其中 y_{k+j} 是已知数据。

通过定义

$$F_j = 0, \quad G_j = z^j C, \qquad for\ j \leq 0 \tag{111}$$

那么等式 (104), (105) 和 (109) 对于所有的 $j < d$ 成立。

将 (109) 代入 (95)，可得

$$J(u_k) = E\left\{\left[P\left(\widehat{y}_{k+d|k} + \widetilde{y}_{k+d|k}\right) - Qs_k\right]^2 + (Ru_k)^2\right\} \tag{112}$$

其中，每个误差 $\widetilde{y}_{k+j|k}$ 仅取决于 w_{k+1} 和后续噪声值，因此 $P\left(z^{-1}\right)\widetilde{y}_{k+j|k}$ 独立于所有其他项。因此

$$J(u_k) = \left(P\widehat{y}_{k+d|k} - Qs_k\right)^2 + (Ru_k)^2 + E\left(P\widetilde{y}_{k+d|k}\right)^2 \tag{113}$$

注意到 $\widehat{y}_{k+d|k}$ 取决于 u_k，而其他 $\widehat{y}_{k+j|k}$ （$j < d$）不取决于 u_k，仅取决于输入的早期值。因此

$$\frac{\partial \widehat{y}_{k+d|k}}{\partial u_k} = \frac{B(0)F_d(0)}{C(0)} = b_0 \tag{114}$$

此外

$$\frac{\partial \left(Ru_k\right)^2}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(r_0 u_k + r_1 u_{k-1} + \ldots + r_{n_R} u_{k-n_R}\right)^2 = 2r_0 R u_k \tag{115}$$

于是，由 (113) 可知

$$\frac{\partial J(u_k)}{\partial u_k} = 2b_0\left(P\widehat{y}_{k+d|k} - Qs_k\right) + 2r_0 R u_k = 0 \tag{116}$$

由此可导出关于广义最小方差控制策略的递归公式如下:

$$P\widehat{y}_{k+d|k} + \frac{r_0}{b_0}Ru_k - Qs_k = 0 \tag{117}$$

上式表明，广义最小方差控制策略 u_k 可以用

$$\{u_{k-1}, u_{k-2}, \cdots; y_k, y_{k-1}, \cdots; s_k, s_{k-1}, \cdots\}$$

来表示了。在当前 k 时刻，这些都是已知量。

将 $P(z^{-1})$ 的定义代入 (117)，有

$$\sum_{j=0}^{n_p} p_j \widehat{y}_{k+d-j|k} + \frac{r_0}{b_0}Ru_k - Qs_k = 0$$

注意到 $p_0=1$，将 (104) 代入上式后

$$\sum_{j=0}^{n_p} p_j G_{d-j} y_k + \sum_{j=0}^{n_p} p_j B F_{d-j} u_{k-j} + \frac{r_0}{b_0} C R u_k - C Q s_k = 0 \tag{118}$$

下面定义两个新多项式：

$$G'\left(z^{-1}\right) = \sum_{j=0}^{n_p} p_j G_{d-j}\left(z^{-1}\right) \tag{119}$$

$$F'\left(z^{-1}\right) = \sum_{j=0}^{n_p} p_j B\left(z^{-1}\right) F_{d-j}\left(z^{-1}\right) z^{-j} + \frac{r_0}{b_0} C\left(z^{-1}\right) R\left(z^{-1}\right) \tag{120}$$

那么，(118) 可化为

$$F'(z^{-1}) u_k = -G'(z^{-1}) y_k + C(z^{-1}) Q(z^{-1}) s_k \tag{121}$$

这是我们最终获得的广义最小方差控制策略的计算公式。

为了直观理解广义最小方差控制，我们可以形象地将控制回路表达为图 3。可见，由于存在反馈和前馈部分，我们现在不仅可以改变系统的极点，也可以调整系统的零点了。

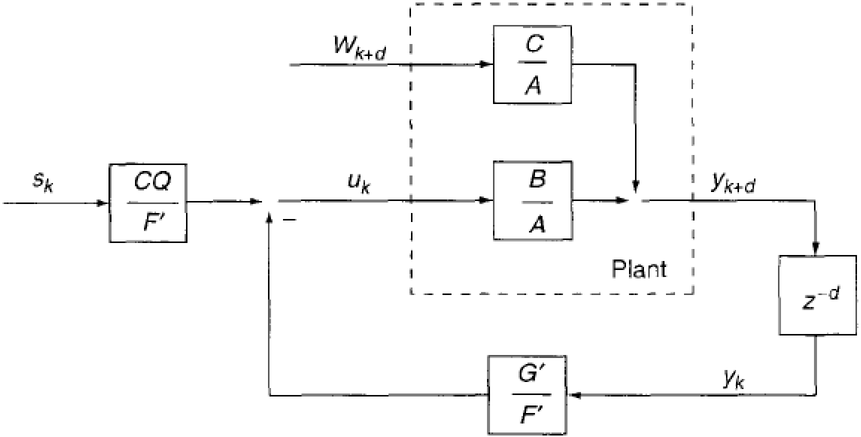

Figure 3: 广义最小方差控制器

下面考虑两个特例。

（1）取 $P\left(z^{-1}\right)=1, Q\left(z^{-1}\right)=0$ 以及 $R\left(z^{-1}\right)=0$，对应的代价函数即为

$$J(u_k)=E\left(y_{k+d}^2\middle|\,\boldsymbol{Y}^k\right)$$

此时，由于 $G^{'}=G_d, F^{'}=BF_d$，由 (121) 可知广义最小方差控制简化为

$$B(z^{-1})F_d(z^{-1})u_k=-G_d(z^{-1})y_k$$

这就是前面讨论的最小方差控制 (84)。

（2）如果取 $P\left(z^{-1}\right)=1, Q\left(z^{-1}\right)=0$ 以及 $R\left(z^{-1}\right)=\mu$，对应的代价函数为

$$J(u_k)=E[y_{k+d}^2+\mu^2u_k^2|\boldsymbol{Y}^k] \tag{122}$$

此时，$G' = G, F' = BF + \frac{\mu}{b_0}C$，由 (121) 可知此时的广义最小方差控制化为

$$u_k = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1}) + \frac{\mu}{b_0}C(z^{-1})}y_k \tag{123}$$

这是用得比较多的广义最小方差控制。

6.2.1 闭环系统分析

广义最小方差控制器依赖于丢番图方程 (107) 的解，它包含一个隐式估计器，用于表示不能直接出现在输出中的内部状态。

根据图 3，从 s_k 到 y_{k+d} 的闭环传递函数为

$$H^{cl}(z) = \frac{CQ}{F'}\frac{BF'}{AF' + BG'z^{-d}} \tag{124}$$

系统的闭环特征多项式为

$$\triangle^{cl}(z) = \left(AF' + BG'z^{-d}\right)z^h \tag{125}$$

其中 h 是在不考虑 $F'(z^{-1})$ 后，$H^{cl}(z)$ 中 z^{-1} 的最高幂。

下面通过例子来进一步讨论广义最小方差控制器的设计。

Example 6.1 假设系统的传递函数描述为

$$Y(z)=\frac{z-0.5}{z^3+1.5z^2-z}U(z)+\frac{z^3+0.25z^2}{z^3+1.5z^2-z}W(z)$$

其中，白噪声 $w_k\sim N(0,q)$。设系统的性能指标为

$$J(u_k)=E\{[(y_{k+2}-y_{k+1})-(s_k-s_{k-1})]^2+(u_k-u_{k-1})^2\}$$

试设计和分析该系统的广义最小方差控制器。

【解】根据系统的传递函数，可知系统的多项式表示为

$$A(z^{-1})y_k=z^{-d}B(z^{-1})u_k+C(z^{-1})w_k$$

即

$$\left(1+1.5z^{-1}-1.0z^{-2}\right)y_k=z^{-2}\left(1-0.5z^{-1}\right)u_k+(1+0.25z^{-1})w_k$$

系统的控制延迟为

$$d=2$$

显然，系统的极点为

$$z=0.5,-2$$

表明原系统是不稳定的。

性能指标可以化为

$$
\begin{aligned}
J(u_k) &= E\{(Py_{k+2} - Qs_k)^2 + (Ru_k)^2\} \\
&= E\left\{\left[\left(1 - z^{-1}\right) y_{k+2} - \left(1 - z^{-1}\right) s_k\right]^2 + \left[\left(1 - z^{-1}\right) u_k\right]^2\right\}
\end{aligned}
$$

其中，s_k 是给定的参考输入，$P(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$，$Q(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$，$R(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$。

首先进行长除法：

$$
\begin{array}{rl}
 & 1-1.25z^{-1} \qquad \leftarrow F_1(z^{-1}), F_2(z^{-1}) \\
1+1.5z^{-1}-z^{-2} \,\big) & 1+0.25z^{-1} \\
 & 1+1.5z^{-1}-z^{-2} \\
\hline
 & -1.25z^{-1}+1.00z^{-2} \qquad \leftarrow G_1(z^{-1}) \\
 & -1.25z^{-1}-1.875z^{-2}+1.25z^{-3} \\
\hline
 & 2.875z^{-2}-1.25z^{-3} \qquad \leftarrow G_2(z^{-1})
\end{array}
$$

由此，可以得到

$$F_1\left(z^{-1}\right)=1,\ G_1\left(z^{-1}\right)=-1.25+z^{-1}$$

$$F_2\left(z^{-1}\right)=1-1.25z^{-1},\ G_2\left(z^{-1}\right)=2.875-1.25z^{-1}$$

本问题中 $n_p=1$，方程 (119) 和 (120) 对应的的复合多项式为

$$
\begin{aligned}
G'\left(z^{-1}\right) &= \sum_{j=0}^{n_p} p_j G_{d-j}\left(z^{-1}\right) = p_0 G_2 + p_1 G_1 \\
&= \left(2.875 - 1.25 z^{-1}\right) - \left(-1.25 + z^{-1}\right) \\
&= 4.125 - 2.25 z^{-1} \\
F'\left(z^{-1}\right) &= \sum_{j=0}^{n_p} p_j B\left(z^{-1}\right) F_{d-j}\left(z^{-1}\right) z^{-j} + \frac{r_0}{b_0} C\left(z^{-1}\right) R\left(z^{-1}\right) \\
&= B(p_0 F_2 + p_1 F_1 z^{-1}) + \frac{r_0}{b_0} C R \\
&= \left(1 - 0.5 z^{-1}\right)\left(1 - 1.25 z^{-1} - z^{-1}\right) + (1 + 0.25 z^{-1})(1 - z^{-1}) \\
&= 2 - 3.5 z^{-1} + 0.875 z^{-2}
\end{aligned}
$$

此外

$$\begin{aligned} C(z^{-1})Q(z^{-1}) &= \left(1+0.25z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right) \\ &= 1-0.75z^{-1}-0.25z^{-2} \end{aligned}$$

于是，由 (121) 可导出

$$\begin{aligned} \left(2-3.5z^{-1}+0.875z^{-2}\right)u_k = &-\left(4.125-2.25z^{-1}\right)y_k \\ &+\left(1-0.75z^{-1}-0.25z^{-2}\right)s_k \end{aligned}$$

写为递推格式则为

$$u_k = \frac{1}{2}\left(3.5u_{k-1}-0.875u_{k-2}-4.125y_k+2.25y_{k-1}+s_k-0.75s_{k-1}-0.25s_{k-2}\right)$$

上式即为本问题的广义最小方差控制。

根据 (125)，可知系统闭环特征多项式为

$$
\begin{aligned}
\triangle^{cl}(z) &= \left(AF^{'} + BG^{'} z^{-d}\right) z^{h} \\
&= \left(2 - 0.5z^{-1} - 2.25z^{-2} + 0.5z^{-3} + 0.25z^{-4}\right) z^{h}
\end{aligned}
$$

其中 h 是抵消 z 最高次负幂所必需的幂数，显然 $h = 4$。因此

$$
\triangle^{cl}(z) = 2z^{4} - 0.5z^{3} - 2.25z^{2} + 0.5z + 0.25
$$

由此可得系统的闭环极点为 $\{-0.25, 0.5, -1.0, 1.0\}$。可见，即使原来的系统是不稳定的，其闭环系统可以是临界稳定的。 $\square$

思考与练习题

8.1 已知平稳过程的相关函数为 $R_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)$，其中 $a>0$，ω_0 为常数，求谱密度 $S_x(\omega)$。

8.2 已知平稳过程的谱密度 $S_x(\omega)=\frac{2Aa^3}{\pi^2(\omega^2+a^2)^2}$，求相关函数 $R_x(\tau)$。

8.3 设 $\{x_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是具有零均值的平稳随机序列，且

$$R_x(n)=\begin{cases}\sigma^2, n=0\\ 0,\ \ n\neq 0\end{cases}$$

求该信号的功率谱密度。

8.4 设平稳随机序列的谱密度为

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1 - \varphi e^{-i\omega}|}, \quad |\varphi| < 1,$$

求相关函数 $R_x(n)$。

8.5 设平稳随机序列的相关函数为 $R_y(m) = a^{|m|}, |a| < 1$，求谱密度 $S_y(z)$ 和 $S_y(\omega)$。

8.6 试对有理谱密度

$$\Phi(\omega) = \frac{1.04 + 0.4\cos\omega}{1.25 + \cos\omega}$$

进行谱分解。

8.7 一平稳离散时间随机过程有谱密度

$$\Phi(\omega) = \frac{2 + 2\cos\omega}{5 + 4\cos\omega}$$

试进行谱分解，并且在输入为白噪声的条件下，确定使输出的谱密度为 $\Phi(\omega)$ 的稳定系统的脉冲传递函数。

8.8 一个动力学系统的差分方程描述为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}\cos h & \sin h\\ -\sin h & \cos h\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_k$$

式中 $h=\pi/4n$。它的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 是高斯的，其均值和协方差分别为

$$E\left\{\boldsymbol{x}(0)\right\}=m_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$R_0=\mathrm{cov}\left[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{x}(0)\right]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

试确定 $k = k^*$ 时的分量 x_1 和 x_2 是独立的最小 k^*，再确定 $\boldsymbol{x}(k^*)$ 的分布。

8.9 考虑如下随机差分方程描述的动力学系统：

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k + \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{bmatrix} e(k)$$

式中，$\{e(k), k \in \mathbb{N}\}$ 是独立同分布高斯 $\mathcal{N}(0,1)$ 随机变量序列；$e(k)$ 和 $\boldsymbol{x}_k$ 互相独立。试确定系统状态稳态的协方差。

8.10 某随机过程由以下随机差分方程描述：

$$x(k+1) = a x_k + e(k), \qquad |a| < 1$$

式中 $\{e(k), k \in \mathbb{N}\}$ 是独立同分布高斯 $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ 随机变量序列；初始

状态 $x\,(k_0) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$；$\{e(k), k \in \mathbb{N}\}$ 与 $x\,(k_0)$ 是独立的。试确定 x_k 的方差和当 $k \to \infty$ 或 $k_0 \to \infty$ 时方差的极限。

8.11 已知 $y_k + 0.3y_{k-1} = w_k + 0.4w_{k-1} - 0.07w_{k-2} - 0.01w_{k-3}$ 的稳态解为 $\{y_k\ k \in \mathbb{N}\}$，$\{w_k\ k \in \mathbb{N}\}$ 为零均值单位白噪声，求 y_k 的一步、二步最小方差预测。

8.12 考虑系统

$$\left(1 - 0.8z^{-1}\right) y_k = 0.2u_{k-2} + \left(1 + 0.7z^{-1}\right) w_k$$

其中 $\{w_k\}$ 是均值为 0 方差为 q 的白噪声，试确定该系统的最小方差预测。

8.13 考虑离散时间系统

$$A\left(z^{-1}\right) y_k = z^{-d} B\left(z^{-1}\right) u_k + C\left(z^{-1}\right) w_k$$

其中，$w_k \in T$ 是均值为 0 方差为 q 的白噪声，

$$A\left(z^{-1}\right) = 1 + 0.3 z^{-1},$$
$$B\left(z^{-1}\right) = 0.2 + 0.17 z^{-1},$$
$$C\left(z^{-1}\right) = 1 + 0.7 z^{-1}.$$

求 y_k 的一步、二步最小方差预测。

8.14 设控制对象的数学模型为

$$A\left(z^{-1}\right) y_k = z^{-d} B\left(z^{-1}\right) u_k + C\left(z^{-1}\right) w_k$$

其中，$\{w_k\}$ 是均值为 0 方差为 q 的白噪声，

$$A\left(z^{-1}\right)=1-1.7z^{-1}+0.7z^{-2},$$

$$B\left(z^{-1}\right)=1+0.5z^{-1},$$

$$C\left(z^{-1}\right)=1+1.5z^{-1}+0.8z^{-2}.$$

分别用长除法和比较系数法求 $d=1$ 和 2 时的最小方差控制策略。

8.15 设控制对象的数学模型为

$$y_k+0.5y_{k-1}=u_{k-1}+w_k+2w_{k-1}$$

试确定其最小方差控制策略和控制误差的方差。

8.16 设控制对象的数学模型为

$$y_k+a_1y_{k-1}=b_0u_{k-1}+w_k$$

求其最小方差控制策略、输出的方差以及输出。

8.17 设控制对象的数学模型为

$$(1-1.6z^{-1}+0.8z^{-2})y_k = z^{-d}(1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2})u_k+(1-0.85z^{-1}+0.5z^{-2})w_k$$

设输出设定值为 y_m，观察在不同滞后 $d=1$ $d=2$ 下，最小方差的控制效果。

8.18 设一个稳定的最小相位二阶系统

$$y_k = 1.5y_{k-1} - 0.7y_{k-2} + u_{k-1} + 0.7u_{k-2} + w_k - 0.6w_{k-1}$$

控制性能指标为

$$J_k = E\left[(y_{k+1} - s_k)^2 + 0.5\,(u_k)^2\right]$$

试给出它的广义最小方差控制策略。

8.19 考虑如下系统:

$$y_k - 1.7y_{k-1} + 0.7y_{k-2} = 0.9u_{k-1} + u_{k-2} + w_k - 0.7w_{k-1}$$

设 w_k 为零均值单位白噪声。(注意到 $B(z^{-1}) = 0.9 + z^{-1}$, $d = 1$, 可见这是一个非最小相位系统。)

(a) 求该系统的最小方差控制, 并进行计算机仿真;

(b) 考虑 $J(u_k) = E[y_{k+1}^2 + \mu^2 u_k^2 | \boldsymbol{Y}^k]$, 求广义最小方差控制

$$u_k = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1}) + \frac{\mu}{b_0}C(z^{-1}))} y_k$$

代入原系统, 推导闭环系统方程 $y_k \sim w_k$, 并仿真分析 $\mu \in [0, +\infty)$ 的影响。

Questions?