[随机最优控制理论] 思考与练习题

9.1 对于 Example 3.2 中的系统，令

$$J_0=(x_N-1)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}ru_k^2$$

分别取 $r=\frac{1}{4},4,8$，比较所得到的极值场。

9.2 考虑标量**随机双线性系统**

$$x_{k+1}=x_ku_k+u_k^2+w_k$$

性能指标为

$$J_0=x_N^2+\sum_{k=0}^{N-1}|x_ku_k|$$

式中 $N=2$。控制约束为 $u_k=\pm1$，状态 x_k 在 $\{-1,0,1,2\}$ 上取值。过程噪声 w_k 的概率密度函数为

$$f_{w_k}(w)=\begin{cases}1, & p=0.5\\ 0, & p=0.25\\ -1, & p=0.5\end{cases}$$

(a) 求最小化 $E\left(J_0\right)$ 的状态反馈控制律；

(b) 假设采用 (a) 中得到的控制律，求给定 $x_0=1$ 下 x_2 的条件概率密度函数；

(c) 假设 x_0 在每个允许值上以概率 1/8 取值，求采用 (a) 中控制下的平均代价函数；

(d) 求取控制律以最大化 x_2 取值为 1 或 2 的概率。

9.3 考虑牛顿系统

$$\ddot{x}=u+w$$

其中过程噪声 $w(t)\sim\mathcal{N}(0,q))$，且 $x(0)\sim N\left(\bar{x}_0,p_0\right)$。令

$$J(0)=\frac{1}{2}x^2(T)+\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}ru^2dt$$

式中 $T=2$。

(a) 写出 HJB 方程，消去 $u(t)$；

(b) 假设

$$\bar{J}^*(x,t)=\frac{1}{2}s_1(t)x^2(t)+s_2(t)x(t)\dot{x}(t)+\frac{1}{2}s_3(t)\dot{x}^2(t)+\frac{1}{2}\int_t^{\mathrm{T}}qs_3(\tau)d\tau$$

其中 s_1,s_2,s_3 为某些函数。运用 HJB 方程，建立这些 s_i 的耦合标量方程，同时给出这些方程的边界条件，并将最优控制表示为 s_i 的线性状态反馈。

9.4 已知系统模型为

$$\dot{x}=u+w$$

$$z=x+v$$

其中 $w\sim\mathcal{N}(0,q')$， $v\sim\mathcal{N}(0,r')$，性能指标为

$$J=\frac{1}{2}s(T)x^2+\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}}\left(qx^2+ru^2\right)dt$$

针对以下情况分别确定最优反馈增益和最优代价函数的解析表达式:

(a) 完整状态信息;

(b) 非完全状态信息。此时还需求出稳态时输出 $z(t)$ 到控制 $u(t)$ 的传递函数，并画出最优稳态调节器的框图。

9.5 在 Example 3.1 的模型中加入测量

$$z=hx+v$$

其中 $v(t)\sim\mathcal{N}(0,r')$ 为量测白噪声，且与 $w(t),x(0)$ 不相关。

(a) 写出 LQG 调节器的完整方程组;

(b) 求 $S(t)$ 和误差协方差 $P(t)$ 的解析解。

9.6 设

$$\dot{x}=ax+bu+gw$$

$$z=hx+v$$

其中 $w(t)\sim\mathcal{N}(0,q')$ 和 $v(t)\sim\mathcal{N}(0,r')$ 为白噪声，且与 $x(0)\sim\mathcal{N}(\bar{x}_0,p_0)$ 互不相关。设

$$J(0)=\frac{1}{2}\int_0^{T}\left(qx^2+ru^2\right)dt$$

(a) 求稳态反馈增益 K_∞；

(b) 求稳态卡尔曼增益 L_∞，并建立维纳滤波器

$$\dot{\widehat{x}} = (a - L_\infty h)\,\widehat{x} + bu + L_\infty z$$

中 z 到 $\widehat{x}$ 的传递函数；然后结合 (a) 和 (b) 的结果，假设增益 K_∞ 和 L_∞ 在所有时间一直适用，给出次优调节器；

(c) 求稳态调节器下 z 到 u 的传递函数，并画出闭环系统的框图；

(d) 求相关次优误差协方差 $p(t)$；

(e) 求次优状态均方值 $X(t)$。

9.7 考虑如下牛顿系统：

$$\ddot{y} = u + w$$

$$z = y + v$$

其中 $w(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ 和 $v(t) \sim \mathcal{N}\left(0, \rho^2\right)$ 为不相关白噪声。取如下无穷时域性能指标：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[q\left(y^2 + \dot{y}^2\right) + ru^2\right] dt$$

(a) 设状态为 $\boldsymbol{x} = [y, \dot{y}]^{\mathrm{T}}$，确定最优反馈增益 K；

(b) 画出闭环模型极点 $(A - BK)$ 随 $\frac{q}{r}$ 从 0 变化到 ∞ 的草图，确定系统的闭环阻尼比和自然频率；

(c) 根据信噪比 $\Lambda = \frac{\sigma}{\rho}$ 确定稳态卡尔曼增益；

(d) 求维纳滤波器的传递函数 $H(s) = \frac{\widehat{X}(s)}{Z(s)}$；

(e) 假设使用维纳滤波器估计所有 t 时刻的状态，确定得到的次优调节器中观测 z 到控制 u 的传递函数；

(f) 观测器多项式为 $|sI - A + LH|$，画出观测器极点图，确定观测器阻尼比和自然频率（用 Λ 表示）；

(g) 求次优误差协方差和均方状态解析表达式。

9.8 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = u + v$$

量测方程为

$$z = x + v$$

其中噪声 $v(t)$ 谱密度为

$$\Phi_z(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\omega^2 + 1}$$

试求解控制 $u(t)$ 以最小化

$$J=\frac{1}{2}x^2(T)+\frac{1}{2}\int_0^T\left(qx^2+u^2\right)dt$$

同时

(a) 确定最优稳态反馈和观测器增益，以及稳态调节器下 $z(t)$ 到 $u(t)$ 的传递函数；

(b) 画出稳态闭环模型以及维纳滤波器极点对 σ^2 和 q 的根轨迹；

(c) 如果对所有 t 时刻使用稳态调节器，求出均方状态 $X(t)$。

9.9 推导 5.3 节中离散时间 LQG 控制方程。

9.10 如果使用反馈形式

$$\mathbf{u}_k=-\mathbf{K}_k\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$$

其中 $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 为 $\mathbf{x}_k$ 的一步预测，推导离散时间 LQG 控制方程。(在控制输入有延迟的采样系统中可能使用这种反馈)

9.11 考虑标量系统

$$x_{k+1}=x_k+u_k$$

$$z_k=x_k+v_k$$

其中，$x_0\sim\mathcal{N}\left(\overline{x}_0,p_0\right)$，$v_k\sim\mathcal{N}\left(0,r'\right)$ 为白噪声，且两者不相关。取

$$J=\frac{1}{2}x_N^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}ru_k^2$$

(a) 写出 LQG 控制方程；

(b) 求解 Kalman 滤波和控制增益。

9.12 对于标量系统

$$x_{k+1}=ax_k+bu_k+gw_k$$

$$z_k=hx_k+v_k$$

其中 $w_k\sim\mathcal{N}\left(0,q'\right)$ 和 $v_k\sim\mathcal{N}\left(0,r'\right)$ 为不相关白噪声。考虑无穷时域性能指标

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(qx_k^2+ru_k^2\right)$$

(a) 求最优反馈增益 K_∞；

(b) 确定稳态卡尔曼增益 L_∞，并给出维纳滤波器下 z_k 到 $\widehat{x}_k$ 的传递函数；

(e) 假设使用维纳滤波器估计所有 k 时刻的状态，求次优调节器中 z_k 到 u_k 的传递函数。