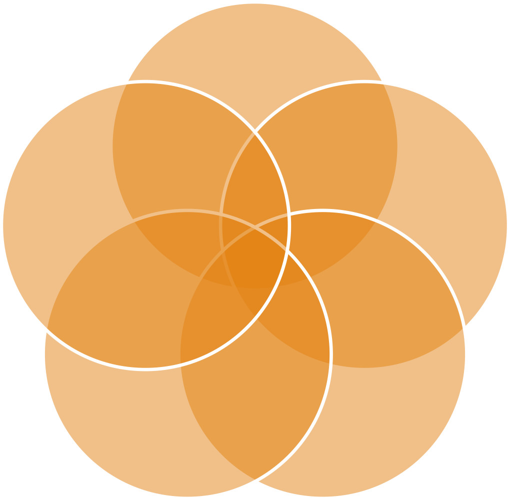
相关基础知识回顾与补充



线性系统理论基础

矩阵代数与矩阵微积分

2.1.1 向量与矩阵

Definition 2.1.1. 向量也称为矢量，是由若干标量按行或列排列组成的一组数. 构成向量的标量称为向量的元素，向量中元素的个数称为向量的维数。

一个 n 维列向量可表示为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

一个 m 维行向量可表示为

$$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_m] \tag{2.2}$$

Definition 2.1.2. 矩阵是由标量构成的二维数表. 具有 n 行、m 列的矩阵称为 $n \times m$ 维矩阵，可表示为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

行数 n 和列数 m 相等的矩阵称为方阵.

Definition 2.1.3. 所有元素为 0 的矩阵 (向量) 称为零矩阵 (零向量)，简记为 $\mathbf{0}$.

Definition 2.1.4. 如果方阵 I 对角线元素为 1、其他元素为 0 的对称方阵，即

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] \tag{2.4}$$

◆ 有时用下标表示**单位矩阵**的维数，例如I_n表示$n \times n$维**单位矩阵**.

◆ 向量可以视为退化了的矩阵.

◆ 构成矩阵的标量称为矩阵的元素，可以是实数(R),也可以是复数(C).

◆ 对于式(2.3)所示矩阵A,如果$\forall a \in R$，那么通常记为$A = [a_{ij}] \in R^{n \times m}$.

◆ 类似地，实向量记为$\boldsymbol{x} \in R^{n \times 1} := R^n\ (\forall x_i \in R), \boldsymbol{y} \in R^{1 \times m}\ (\forall y_i \in R)$.

◆ (2.3)所示矩阵A可以认为是由n个行向量$\overline{A}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}](i = 1, \ldots, n)$构成的，也可以认是由$m$个列向量$A_i(i = 1,2, \cdots, m)$构成的.即

$$A = [A_1, A_2, \ldots, A_m] = \begin{bmatrix} \overline{A}_1 \\ \overline{A}_2 \\ \vdots \\ \overline{A}_n \end{bmatrix}$$

Definition 2.1.5. 对一组向量 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n\}$, 如果存在一组不全为零的标量 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, 使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = 0 \tag{2.6}$$

那么称向量组 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n\}$ 是线性相关的. 否则, 称该向量组是线性无关的. 线性无关又称为线性独立.

例如，向量 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ 是线性相关的，因为 $2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = 0$. 而 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 则是线性无关的。行向量 $[1,0,0]$,$[0,1,0]$,$[0,0,1]$, 三者也是线性无关的.

Definition 2.1.6. 对于任意的矩阵 A，其中线性无关行向量的个数定义为矩阵 A 的秩，记为 $\rho(A)$.

可以证明，矩阵 A 的秩也等于 A 中线性无关列向量的个数.

Theorem 2.1.1. $n \times m$ 维矩阵 A 的秩总是小于或等于矩阵的行数 n 或列数 m，即

$$\rho(A) \leq \min(n, m) \tag{2.7}$$

如果 $\rho(A) = \min(n, m)$，那么称 A 是满秩的.

Theorem 2.1.2. $n \times m$ 维矩阵 A 的零度定义为 $[m - \rho(A)]$.

把一个矩阵（A）的所有行变为列、所有列变为行，所得的新矩阵称为原矩阵的转置，记为 A^T. 例如矩阵（2.3）的转置为

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.1.2 矩阵代数

Definition 2.1.7. 具有相同维数的矩阵 $A = [a_{ij}]$ 和 $B = [b_{ij}]$, 两者之间的加法和减法分别定义为

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \tag{2.12}$$

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}] \tag{2.13}$$

Definition 2.1.8. 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 与标量 k 之间的乘法（数乘）定义为

$$kA = Ak = [ka_{ij}] \tag{2.14}$$

Definition 2.1.9. 矩阵 A（$n \times r$ 维）和矩阵 B（$r \times m$ 维）之积 (乘法) 记为 $C = AB = [c_{ij}]$，其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \qquad i = 1, \cdots, n \qquad j = 1, \cdots, m \tag{2.15}$$

显然，A 列数和 B 的行数需要相等，AB 才有定义. 另外，一般地 $AB \neq BA$.

Definition 2.1.10. 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是相同维数的向量，标量 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的内积或点积. 假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的维数为 n, 那么

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{2.16}$$

如果 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$, 称两者是正交的.

Definition 2.1.11. $\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的 2-范数，记为

$$||\boldsymbol{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{2.17}$$

向量的 2-范数也称为欧几里得范数, 另外经常简记为 $||\boldsymbol{x}||$.

Definition 2.1.12. 向量 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 与 $\boldsymbol{y} \in R^m$ 的外积定义为 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$，这是一个如下形式的矩阵:

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_m & x_ny_m & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$
\begin{aligned}
PHP^T &= \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{p1} & \cdots & p_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{pn} \end{bmatrix} \\
&= [P_1, \cdots, P_n] \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} P_i h_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} P_i h_{ip} \right] \begin{bmatrix} P_1^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_i h_{ij} P_j^T
\end{aligned}
$$

Definition 2.1.14. 设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$, 下式（对 $\forall i\in[1,n]$ 均成立）

$$\det(A):=|A|:=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \tag{2.24}$$

称为矩阵 A 的行列式. 式中 $A_{ij}\in R^{(n-1)\times(n-1)}$ 表示 A 矩阵删除第 i 行和第 j 列后，剩余元素构成的矩阵. 式（2.24）称为矩阵 A 沿第 i 行的拉普拉展开 (*Laplace expansion*).

与 (2.24) 类似，我们有

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}| \tag{2.25}$$

Theorem 2.1.3. 如果 A 和 B 是具有相同维数的两个方阵，那么

$$|AB| = |A||B|$$

Definition 2.1.15. 设 $A \in R^{n\times n}$, 如果

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

那么 $\lambda \in R$ 称为 A 的一个特征值,$\boldsymbol{v} \in R^n$ 称为 λ 对应的的特征向量.

$n \times n$ 维矩阵具有 n 个特征值，可能有相同取值.

Theorem 2.1.4. 设 λ_i 是矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 的特征根，那么

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Definition 2.1.16. 对于矩阵 $A \in R^{n\times n}$, 如果存在矩阵 $A^{-1} \in R^{n\times n}$，使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{2.29}$$

那么 A^{-1} 称为 A 的逆矩阵.

一般地，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (假设对应的逆存在). 此外，$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

如果一个矩阵不存在逆矩阵，那么称该矩阵不可逆，或者说是奇异的. 可逆矩阵又称非奇异矩阵，非奇异矩阵一定是方阵，反之则不然. 可以利用向量线性无关的概念，矩阵非奇异也可以定义为矩阵的任意行（或列）不是其他行（或列）的线性组合. 此外，矩阵非奇异也可以定义为矩阵的行列式不等于零，即 $|A| \neq 0$.

Definition 2.1.17. 如果 $A^T = A^{-1}$，那么 A 称为正交矩阵 (或旋转矩阵).

Theorem 2.1.5. 如果 A 是正交矩阵，那么 $|A| = 1$ 或 -1.

Theorem 2.1.6. 假设 $A \in R^{n\times n}$，那么如下说法是等价的:

- A 是非奇异的.
- A^{-1} 存在.
- $\rho(A) = n$.
- 构成 A 的所有列向量是线性无关的.
- 构成 A 的所有行向量是线性无关的.
- $|A| \neq 0$.
- 对于任意的 $\boldsymbol{b} \in R^n$, 代数方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 具有唯一解 $\boldsymbol{x}$.
- 0 不是 A 的特征值.

Definition 2.1.18. 对于矩阵 $A \in R^{n\times n}$, 它的迹 *(trace)* 定义为矩阵 A 对角元素之和. 即

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{2.37}$$

根据 2-范数的定义，不能发现 $tr(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T) = ||\boldsymbol{x}||_2^2$. 对于适当维数的矩阵 A 和 B, 有 $tr(AB) = tr(BA)$.

Property 2.1.1. 设 λ_i 是矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 的第 i 个特征值, 那么

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{2.38}$$

Definition 2.1.19. 设 $A = A^T$, 对任意非零的 $\boldsymbol{x}$, 如果

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$$

那么称 A 是正定的，记为 $A > 0$; 如果

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \geq 0$$

那么称 A 是半正定或非负定的，记为 $A \geq 0$; 如果

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} < 0$$

那么称 A 是负定的，记为 $A < 0$; 如果

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \leq 0$$

那么称 A 是半负定或非正定的，记为 $A \leq 0$; 如果 A 既非正定，也非负定，那么称 A 是不定的.

Theorem 2.1.7. $\lambda(A)$ 表示 A 的所有特征值:

- 如果 $A > 0$, 那么 $\lambda(A) > 0$(正的实数), 而且 A^{-1} 存在且 $A^{-1} > 0$;
- 如果 $A \geq 0$, 那么 $\lambda(A) \geq 0$(非负的实数);
- 如果 $A < 0$, 那么 $\lambda(A) < 0$(负的实数), 而且 A^{-1} 存在且 $A^{-1} < 0$;
- 如果 $A \leq 0$, 那么 $\lambda(A) \leq 0$(非正的实数);
- 如果 A 是不定的, 那么 A 的特征值有的为正、有的为负。

Definition 2.1.20. 向量 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 的 Q 加权 2-范数定义为

$$||\boldsymbol{x}||_Q = \sqrt{\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}} \tag{2.43}$$

其中，$Q = Q^T > 0(\in R^{n\times n})$.

Definition 2.1.21. 矩阵 $A \in R^{n\times m}$ 的奇异值 $\sigma(A)$ 定义为 $A^T A$ 或 AA^T 非零部分特征值, 可表示为

$$\sigma(A) = \sqrt{\lambda(A^T A)} = \sqrt{\lambda(AA^T)} \tag{2.44}$$

矩阵 A 奇异值的个数为 $\min(n, m)$.

根据向量的 2-范数，我们也可以定义矩阵的大小（范数）．

Definition 2.1.22. 矩阵 A 的 2-范数定义为

$$||A||_2 = \max_{\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_2}{||\boldsymbol{x}||_2} = \sup_{||\boldsymbol{x}||=1} ||A\boldsymbol{x}||_2$$

Theorem 2.1.8.

$$||A||_2 = \sigma_{max}(A)$$

式中，$\sigma_{max}(A)$ 表示矩阵 A 的最大奇异值.

Theorem 2.1.9. 【矩阵求逆引理】设 A_{11} 和 A_{22} 是可逆方阵，A_{12} 和 A_{21} 是适当维数的矩阵，那么

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{12}A_{11}^{-1} \tag{2.47}$$

【证明】设分块表示的矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, 那么

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \mathbf{0} \Rightarrow B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$$

$$\Rightarrow B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21})$$

$$\Rightarrow B_{21} = -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$\Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1} \Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1} + B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$\Rightarrow B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

矩阵求逆引理有时也写为如下等价形式:

$$(A_{11}+A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}+A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{12}A_{11}^{-1} \tag{2.53}$$

矩阵求逆引理有广泛的应用，特别是在矩阵求逆时可以大幅度减小计算量。例如，设 $A_{11}=I\in R^{n\times n}$, $A_{22}=D\in R^{q\times q}$, $A_{12}=B\in R^{n\times p}$,$A_{21}=C\in R^{p\times n}$, 式（2.53）化为

$$(I+BD^{-1}C)^{-1}=I-B(D+CB)^{-1}C \tag{2.54}$$

上式左端需要对 $n\times n$ 维矩阵求逆，右端仅需要对 $p\times p$ 维矩阵求逆。当 $n\gg p$ 时，右端的计算量会降低很多。

Definition 2.1.25. 方阵 A 的幂指数 e^A 定义为

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

其中，$A^2 = AA, A^3 = AAA = AA^2 = A^2A,$ 等.

Theorem 2.1.12. 对于适当维数的矩阵 A、B 和 T，有

(1) 若$AB = BA,\quad e^{A+B} = e^A e^B;$

(2) 当$|T| \neq 0,\quad e^{TAT^{-1}} = Te^AT^{-1};$

(3) $|e^A| = e^{tr(A)}.$

2.1.3 矩阵微积分

Definition 2.1.26. 对于时变矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{bmatrix}$，其关于时间的微分和积分

$$\dot{A}(t)=\begin{bmatrix} \dot{a}_{11}(t) & \cdots & \dot{a}_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{a}_{n1}(t) & \cdots & \dot{a}_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

$$\int A(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1m}(t)\mathrm{d}t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{n1}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{nm}(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

Theorem 2.1.13. 假设 $A(t)$ 是随时间变化的可逆矩阵，即 $A^{-1}(t)$ 存在，所有元素光滑可导，那么

$$\frac{\mathrm{d}A^{-1}}{\mathrm{d}t} = -A^{-1}\dot{A}A^{-1}$$

Definition 2.1.27. 设 $A = [a_{ij}] \in R^{n\times m}$，$f(A)$ 是关于 A 的标量函数，那么

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{1m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial a_{n1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{nm}} \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$，所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right]$$

Theorem 2.1.14.

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{x}$$

【证明】不失一般性，设 $A \in R^{n\times n}$, 那么

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j & + & \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \\ & \vdots & \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j & + & \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \end{bmatrix} \\
&= A\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \begin{bmatrix} \partial g_1(\boldsymbol{x})/\partial x_1 & \cdots & \partial g_1(\boldsymbol{x})/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_m(\boldsymbol{x})/\partial x_1 & \cdots & \partial g_m(\boldsymbol{x})/\partial x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right]^T$$

$$\frac{\partial A\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}^T} = A$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^T A^T}{\partial \boldsymbol{x}} = A^T$$

Theorem 2.1.15. 设 $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{n \times n}$, 那么

$$\frac{\partial tr(ABA^T)}{\partial A} = AB^T + AB$$

当 $B = B^T$ 时

$$\frac{\partial tr(ABA^T)}{\partial A} = 2AB$$

线性动态系统

确定性连续时间系统可描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{2.87}$$

式中，$\boldsymbol{x} \in R^n$ 是系统的状态向量，$\boldsymbol{u} \in R^m$ 是系统的输入（控制）向量. $A \in R^{n\times n}$ 称为系统矩阵，$B \in R^{n\times m}$ 称为输入矩阵. A 和 B 可以是时变矩阵，此时称为式 (2.87) 为线性时变系统. 当 A 和 B 是常值矩阵时，式 (2.87) 称为线性时不变系统或线性定常系统.

转移矩阵

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$$

Theorem 2.2.1. 设初始时刻 t_0 系统状态为 $\boldsymbol{x}(t_0)$，系统 (2.88) 的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

式中，$\Phi(t, t_0) \in R^{n\times n}$ 称为系统的转移矩阵，并满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

Theorem 2.2.2. 对线性时不变系统，$A(t)=A$ 不随时间变化, 有

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$$

【证明】将 $\boldsymbol{x}(t)$ 在时刻 t_0 泰勒级数展开

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t_0)+\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)(t-t_0)+\ddot{\boldsymbol{x}}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=A\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t_0)=A\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=A^2\boldsymbol{x}(t_0)$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{x}(t_0)+A\boldsymbol{x}(t_0)(t-t_0)+A^2\boldsymbol{x}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots\\&=\left[I+A(t-t_0)+A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}}$$

Theorem 2.2.3. 对时不变系统矩阵 A, 有

$$e^{A(t-t_0)} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

其中 $\mathcal{L}^{-1}$ 表示拉普拉斯逆变换.

【证明】对 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ 两端取拉普拉斯变换

$$sX(s) - \boldsymbol{x}(t_0) = AX(s)$$

Theorem 2.2.4. 对于线性时变系统 (2.87)，状态向量的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中，$\boldsymbol{x}(t_0)$ 为系统状态初值，$\Phi(t, t_0)$ 为系统状态转移矩阵.

Theorem 2.2.5. 对于线性系统 (2.87)，如果 A 和 B 是定常矩阵，那么

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中，$\boldsymbol{x}(t_0)$ 为系统状态初值，$e^{A(t-t_0)}$ 为此时系统状态转移矩阵.

小扰动线性化

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})} \qquad \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \approx \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0 \boldsymbol{x} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_0 \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{\dot{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

$$A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_0 = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$B = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_0 = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{u}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$$

$$\boxed{\Delta \dot{\boldsymbol{x}} = A \Delta \boldsymbol{x} + B \Delta \boldsymbol{u}}$$

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$$

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*$$

$$A = \left. \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_* = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$B = \left. \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} \right|_* = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)}{\partial \boldsymbol{u}}$$

采样控制系统

$$\boldsymbol{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\boldsymbol{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{k+1} = F_k \boldsymbol{x}_k + G_k \boldsymbol{u}_k}$$

$$F_k = \Phi(t_{k+1}, t_k)$$

$$G_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)\mathrm{d}\tau$$

在采样间隔 充分小的条件下

$$F_k \approx [I + A(t_k)]\Delta t$$

$$G_k \approx B(t_k)\Delta t$$

线性时不变系统

$$F_k = e^{A(t_{k+1}-t_k)} = e^{A\Delta t}$$

$$G_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\mathrm{d}\tau B = \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\lambda)}\mathrm{d}\lambda B$$

如果系统矩阵 A 非奇异，因为

$$\int_0^{\Delta t} e^{-A\lambda}\mathrm{d}\lambda = \int_0^{\Delta t}\left(I - A\lambda + \frac{1}{2!}A^2\lambda^2 - \cdots\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$= [I - e^{-A\Delta t}]A^{-1}$$

$$F_k = F = e^{A\Delta t}$$

$$G_k = G = F[I - e^{-A\Delta t}]A^{-1}B$$

稳定性

Definition 2.5.1. 考虑连续时间线性时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{2.130}$$

对任意有界的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，如果 $\boldsymbol{x}(t)$ $(\forall t > 0)$ 有界，那么称系统 (2.130) 是李雅普诺夫稳定的.

Definition 2.5.2. 对任意有界的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，如果

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0} \tag{2.131}$$

那么称系统 (2.130) 是渐进稳定的.

可控性

Definition 2.6.1. 对连续时间系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}$，如果存在控制 $\boldsymbol{u}(t)$, 使系统从任何初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$, 转移到任何期望的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ $(\forall t > 0)$，那么称该系统是可控的.

Definition 2.6.2. 对连续时间系统 $\boldsymbol{x}_{k+1} = F_k\boldsymbol{x}_k + G_k\boldsymbol{u}_k$，如果存在控制 $\{\boldsymbol{u}_0, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$, 使系统从任何初始状态 $\boldsymbol{x}_0$, 转移到任何期望的状态，那么称该系统是可控的.

可观性

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}
\end{cases}
\tag{2.148}
$$

其中，$\boldsymbol{x} \in R^n$ 是系统的状态向量, $\boldsymbol{y} \in R^m$ 为系统的输出向量,$\boldsymbol{u} \in R^m$ 是系统的输入（控制）向量.$A \in R^{n\times n}$ 是系统矩阵，$B \in R^{n\times m}$ 是输入矩阵,$C \in R^{m\times n}$ 称系统的输出矩阵.

Definition 2.6.3. 如果由系统的输入 $\boldsymbol{u}(\tau)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(\tau),\tau \in [0,t](\forall t > 0)$, 可以唯一确定系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$, 那么连续时间线性系统 (2.148) 称为可观的.

可镇定性与可检测性

可镇定性 (stabilizability) 和可检测性 (detectability) 与系统的模态有关，同时分别与系统的可控性和可观性密切相关. 对线性系统，我们通常可以通过非奇异变化，将系统解耦为不同性质的模态.

Definition 2.6.5. 如果一个系统的不可控模态是稳定的，那么称该系统是可镇定的.

Definition 2.6.6. 如果一个系统是可观的，或者不可观模态是稳定的，那么该系统成为可检测的.

连续时间系统仿真

如果给定控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$, 那么可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{x}_k + I_k$$

最简单的积分方法是欧拉法，即

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, t_k) \tag{2.157}$$

容易看出，此时 $I_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, t_k)h + O(h^2)$. 因此，欧拉法是 1 阶收敛的，截断误差是 $O(h^2)$. 只有当积分步长 h 足够小时，欧拉法才能获得足够的数值计算精度.

欧拉法的直接改进是梯形法，即

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2) \tag{2.158}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}_1=h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k,t_k)\\ \boldsymbol{k}_2=h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{h}_1,t_k+h)\end{cases} \tag{2.159}$$

可以验证，梯形法是 2 阶收敛的，截断误差是 $O(h^3)$. 梯形法的计算精度比欧拉法要高，计算量也要大一些.

4 阶龙格-库塔 (Runge-Kutta) 法

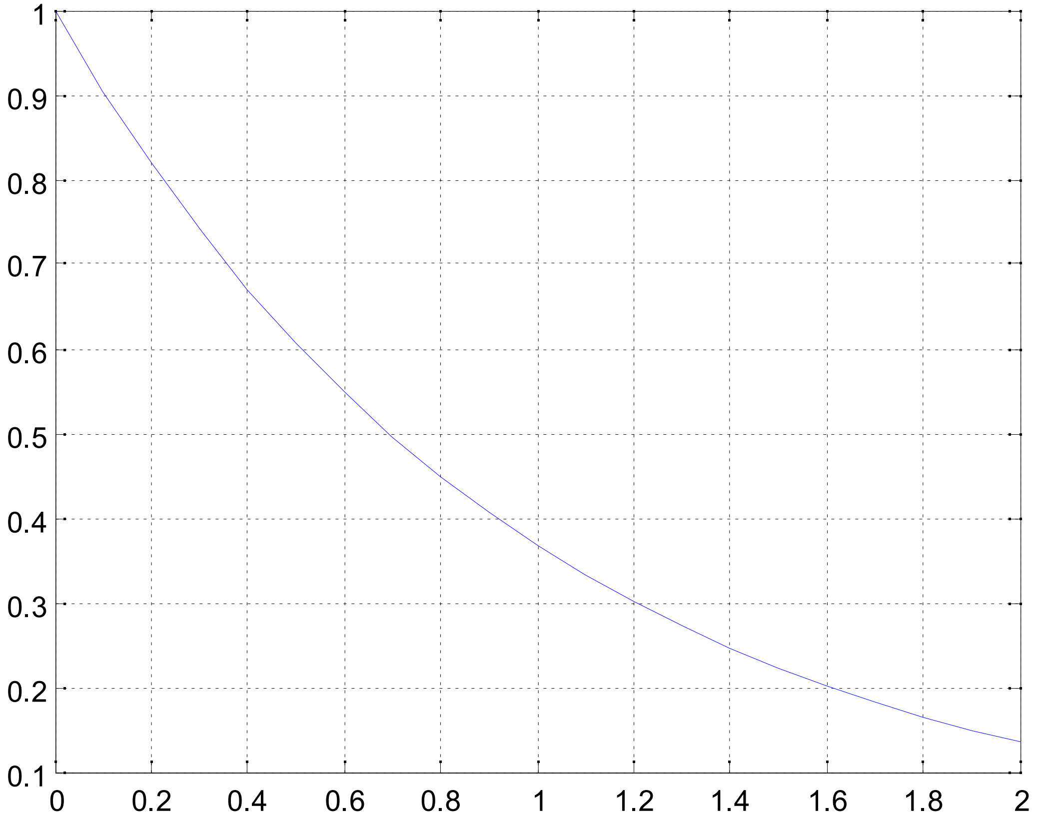
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, t_k) \\ \boldsymbol{k}_2 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1, t_k + \frac{1}{2}h) \\ \boldsymbol{k}_3 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2, t_k + \frac{1}{2}h) \\ \boldsymbol{k}_4 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{k}_3, t_k + h) \end{cases}$$

4 阶龙格-库塔法是 4 阶收敛的，截断误差是 $O(h^5)$.

仿真算例

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2, x_2(0) = 1 \end{cases}$$



MATLAB ode45

1. step = 0.1;
2. ts=0:step:2.0;
3. x0=[0,1];
4. [t,x] = ode45(@fct1, ts, x0);
5. xact = exp(-t);
6. [t,x, xact]
7. plot(t,x(:,2)); grid;

fct1.m:

1. %right-hand function
2. function xdot=fct1(t,x)
3. xdot = zeros(2,1);
4. xdot(1) = 1.0;
5. xdot(2) = ydot(x(2));

1. function dy = ydot(x)
2. dy = -x;