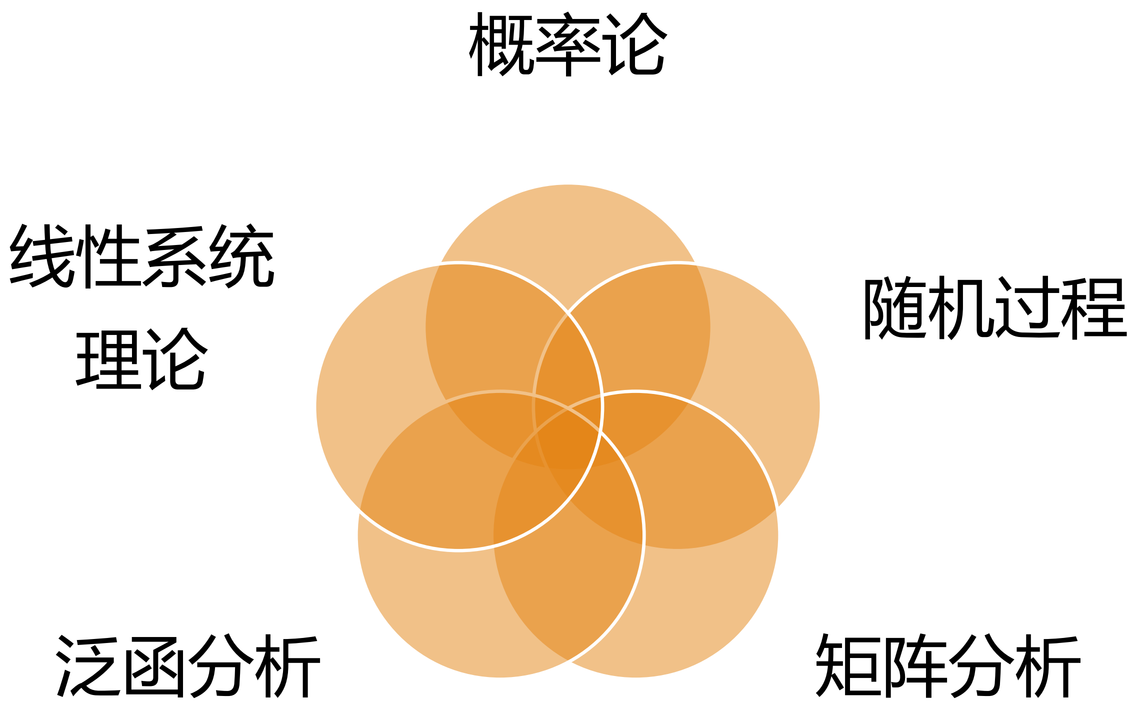
相关基础知识回顾与补充



随机过程基础

Definition 3.2.1 (随机过程). 给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 和参数集 $T \subset (-\infty, +\infty)$, 若对于每个 $\omega \in \Omega$ 和 $t \in T$ 都有一个定义在概率空间上的随机向量 $\boldsymbol{x}(\Omega, t)$ 与它对应, 则称依赖于参数 t 的随机变向量 $\{\boldsymbol{x}(\Omega, t), t \in T\}$ 为 (向量) 随机过程. 简单记为 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 或 $\boldsymbol{x}(t)$.

理论上我们需要研究所有可能的联合分布函数

$$F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m; t_1, t_2, \cdots, t_m), \quad \forall m \geq 1.$$

随机过程的数字特征

Definition 3.2.2 (随机过程的数学期望). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是一个随机过程，如果对每一个 $t \in T$, 随机向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的均值都存在，则称

$$\boxed{E[\boldsymbol{x}(t)] = \bar{\boldsymbol{x}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \tag{3.44}$$

为随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 的数学期望或均值. 也记为 $E\boldsymbol{x}(t)$ 或 $\boldsymbol{m}_X(t)$.

Definition 3.2.3 (随机过程的协方差). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是一个随机过程，如果对每一个 $t \in T$, 随机向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的协方程矩阵存在，则称

$$\boxed{P_X(t) = E[\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t)][\boldsymbol{x}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}(t)]^T} \tag{3.45}$$

为随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 的协方差矩阵. 有时也记为 $C_X(t)$.

对于一维随机过程 $\{x(t), t \in T\}$，上述协方差称为随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 的方差函数，经常记为 $\sigma_X^2(t)$ 或 $D_X(t)$. 而 $\sigma_X(t) = \sqrt{D_X(t)}$ 称为随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 的均方差函数.

Definition 3.2.4 (自相关与自协方差矩阵). 对任意的两个时刻 t_1, t_2, 称

$$\boxed{R_X(t_1,t_2) = E[\boldsymbol{x}(t_1)][\boldsymbol{x}(t_2)]^T} \tag{3.46}$$

为随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 的自相关函数矩阵. 称

$$\boxed{C_X(t_1,t_2) = E[\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{m}_X(t_1)][\boldsymbol{x}(t_2) - \boldsymbol{m}_X(t_2)]^T} \tag{3.47}$$

为随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 的自协方差函数矩阵.

Definition 3.2.5 (互相关与互协方差矩阵). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}(t), t \in T\}$ 是两个随机过程，对任意的两个时刻 t_1, t_2, 称

$$\boxed{R_{XY}(t_1, t_2) = E[\boldsymbol{x}(t_1)][\boldsymbol{y}(t_2)]^T} \tag{3.48}$$

为随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 与 $\{\boldsymbol{y}(t), t \in T\}$ 的互相关函数矩阵. 称

$$\boxed{C_{XY}(t_1, t_2) = E[\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{m}_X(t_1)][\mathbf{Y}(t_2) - \boldsymbol{m}_Y(t_2)]^T} \tag{3.49}$$

为随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 与 $\{\boldsymbol{y}(t), t \in T\}$ 的互协方差函数矩阵.

Definition 3.2.6 (随机过程之间的相关性). 对任意的 $t,\tau \in T$, 若

$$\boxed{E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}^T(\tau)] = E\boldsymbol{x}(t)E\boldsymbol{y}^T(\tau)} \tag{3.50}$$

或等价地 $C_{XY}(t,\tau) = \mathbf{0}$，则称随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}(t), t \in T\}$ 不相关. 若 $R_{XY}(t,\tau) = \mathbf{0}$，则称 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 与 $\{\boldsymbol{y}(t), t \in T\}$ 正交.

Definition 3.2.7 (随机过程之间的独立性). 对任意的 $t,\tau \in T$, 若

$$\boxed{F_{XY}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(\tau)] = F_X[\boldsymbol{x}(t)]F_Y[\boldsymbol{y}(\tau)]} \tag{3.51}$$

或者 $\boxed{f_{XY}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(\tau)] = f_X[\boldsymbol{x}(t)]f_Y[\boldsymbol{y}(\tau)]}$, 则称随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 与 $\{\boldsymbol{y}(t), t \in T\}$ 相互独立. 其中 $F_{XY}(\cdot,\cdot)$ 和 $f_{XY}(\cdot,\cdot)$ 分别为联合分布函数及联合概率密度函数，$F_X(\cdot), F_Y(\cdot)$ 和 $f_X(\cdot), f_Y(\cdot)$ 分别为对应的边缘分布函数及边缘概率密度.

平稳性与遍历性

Definition 3.2.8 (严平稳随机过程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是一个随机过程, 若对任意正整数 m, 任意 $t_1, t_2, \cdots, t_m \in T$ 及使 $t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_m+\tau \in T$ 的 τ, 随机向量族 $\boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(t_2), \cdots, \boldsymbol{x}(t_m)$ 的联合分布函数与 $\boldsymbol{x}(t_1+\tau), \boldsymbol{x}(t_2+\tau), \cdots, \boldsymbol{x}(t_m+\tau)$ 的联合分布函数满足

$$\boxed{F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m; t_1, t_2, \cdots, t_m) = F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m; t_1+\tau, t_2+\tau, \cdots, t_m+\tau)} \tag{3.52}$$

则称 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是严格平稳随机过程, 简称严平稳随机过程.

Definition 3.2.9 (二阶矩过程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是一个随机过程, 若 $E||\boldsymbol{x}(t)||^2 \leq +\infty$, 则称 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是二阶矩随机过程.

Definition 3.2.10 (宽平稳随机过程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是一个二阶矩随机过程，若

$$(1)\ \ E\boldsymbol{x}(t) = \bar{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{m}_X(\text{不随时间变化});$$

$$(2)\ \ E\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t+\tau) = R_X(\tau), \forall t \in T, \tau \geq 0.$$

则称 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是宽平稳随机过程，简称平稳随机过程.

对宽平稳随机过程，显然有

$$R_X(0) = E\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)$$

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau)$$

对应标量随机过程 $\{x(t), t \in T\}$, 则有 $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$.

Definition 3.2.11 (谱密度). 设 $R_X(\tau)$ 是平稳随机过程 $x(t)$ 的相关函数，那么

$$\boxed{\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau}$$

称为随机过程 $x(t)$ 的谱密度.

上述谱密度在文献中也称为功率谱、功率密度谱、功率谱密度或功率密度.

$$\boxed{R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(\omega) e^{j\omega\tau} \mathrm{d}\omega}$$

合称为维纳-辛钦 (Wiener—Khintchine) 公式.

Definition 3.2.12 (互谱密度). 设平稳随机过程 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数为 $R_{XY}(\tau)$, 称

$$\boxed{\phi_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau}$$

为 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互谱密度.

假设随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 有一个具体实现 $\boldsymbol{\xi}_X(t)$(也称样本函数)，我们用

$$\boxed{\begin{aligned} A[\boldsymbol{x}(t)] &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \boldsymbol{\xi}_X(t)\mathrm{d}t \\ R[\boldsymbol{x}(t), \tau] &= A[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t+\tau)] \end{aligned}}$$

分别表示该随机过程的时间平均及时间自相关矩阵.

Definition 3.2.13 (遍历性). 对平稳随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$,

(1) 如果

$$\boxed{A[\boldsymbol{x}(t)] = E\boldsymbol{x}(t) = \mu_X}$$

依概率 1 成立，则称随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 的均值具有遍历性;

(2) 如果

$$\boxed{R[\boldsymbol{x}(t), \tau] = E\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t+\tau) = R_X(\tau)}$$

依概率 1 成立，则称随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 的相关函数具有遍历性;

(3) 如果均值和相关函数都具有遍历性，则称随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 具有遍历性.

遍历性又称为各态历经性.

随机变量 x 与标量 ξ 依概率相等是指

$$\boxed{P\{|x-\xi| \leq \varepsilon\} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.} \tag{3.62}$$

对于离散随机过程 $\{\boldsymbol{x}_i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, 假设一个实现样本为 $\boldsymbol{\xi}_i$, 时间平均及时间自相关矩阵计算公式如下:

$$A[\boldsymbol{x}_i] = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \boldsymbol{\xi}_i \tag{3.63}$$

$$R[\boldsymbol{x}_i, \tau] = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_{i+\tau}^T \tag{3.64}$$

高斯-马尔可夫过程

Definition 3.2.14 (高斯过程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 n 维向量随机过程，对任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_m \in T$，如果随机向量组 $\{\boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(t_2), \cdots, \boldsymbol{x}(t_m)\}$ 服从 $n \times m$ 维的正态分布，则称 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是高斯过程.

Definition 3.2.15 (马尔可夫过程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的向量随机过程，对任意整数 n 及任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$\forall t_i \in T$，如果随机向量 $\boldsymbol{x}(t_n)$ 的条件概率密度

$$\boxed{f[\boldsymbol{x}(t_n)|\boldsymbol{x}(t_{n-1}), \boldsymbol{x}(t_{n-2}), \cdots, \boldsymbol{x}(t_1)] = f[\boldsymbol{x}(t_n)|\boldsymbol{x}(t_{n-1})]} \tag{3.65}$$

则称随机过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 是马尔可夫过程. 如果参数集 T 是离散时间集，此时也称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为马尔科夫链.

不难验证，马尔可夫过程有如下重要的性质:

$$\boxed{f[\boldsymbol{x}(t_n),\boldsymbol{x}(t_{n-1}),\boldsymbol{x}(t_{n-2}),\cdots,\boldsymbol{x}(t_1)]=f[\boldsymbol{x}(t_n)|\boldsymbol{x}(t_{n-1})]f[\boldsymbol{x}(t_{n-1})|\boldsymbol{x}(t_{n-2})]\cdots f[\boldsymbol{x}(t_2)|\boldsymbol{x}(t_1)]f[\boldsymbol{x}(t_1)]} \tag{3.66}$$

其中的条件概率密度 $f[\boldsymbol{x}(t_{k+1})|\boldsymbol{x}(t_k)]$ 称为马尔可夫过程 $\{\boldsymbol{x}(t),t\in T\}$ 的**转移概率密度**.

关于转移概率，由贝叶斯公式可知

$$\boxed{f[\boldsymbol{x}(t_{k+1})|\boldsymbol{x}(t_k)]=\frac{f[\boldsymbol{x}(t_{k+1}),\boldsymbol{x}(t_k)]}{f[\boldsymbol{x}(t_k)]}=\frac{f[\boldsymbol{x}(t_{k+1}),\boldsymbol{x}(t_k)]}{\int_{-\infty}^{+\infty}f[\boldsymbol{x}(t_{k+1}),\boldsymbol{x}(t_k)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t_{k+1})}}$$

说明马尔可夫过程的任意有限维分布密度函数可以由二维的分布密度函数确定.

Theorem 3.2.1 (查普曼-柯尔洛夫 (Chapman-Kolmogrov) 方程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的马尔可夫过程, 对 T 中任意的 $t_2 < t_1 < t_0$, 有

$$\boxed{f[\boldsymbol{x}(t_2)|\boldsymbol{x}(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f[\boldsymbol{x}(t_2)|\boldsymbol{x}(t_1)] f[\boldsymbol{x}(t_1)|\boldsymbol{x}(t_0)] \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t_1)} \tag{3.67}$$

【证明】(作业)

Definition 3.2.16 (独立随机过程). 设 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的向量随机过程，对任意整数 n 及任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $\forall t_i \in T$, 如果随机向量 $\boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(t_2), \cdots, \boldsymbol{x}(t_n)$ 是相互独立的，那么称随机过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 是独立随机过程，也称为纯随机过程.

显然独立随机过程是马尔可夫过程.

Definition 3.2.17 (高斯-马尔可夫过程). 如果随机过程 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 既是高斯过程，又是马尔可夫过程，则称 $\{\boldsymbol{x}(t), t \in T\}$ 为高斯-马尔可夫过程.

Example 3.2.1. 考虑离散时间随机系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k$$

其中，$\{\boldsymbol{w}_k, k \in (0, 1, 2, \cdots)\}$ 是均值为 $\mathbf{0}$ 的高斯独立随机过程，且与高斯随机向量 $\boldsymbol{x}_0$ 独立. 判断 $\{\boldsymbol{x}_k, k \in (0, 1, 2, \cdots)\}$ 是什么属性的随机过程.

【解】因为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_0 x_0 + w_0 \\
x_2 &= F_1 x_1 + w_1 = F_1 F_0 x_0 + F_1 w_0 + w_1 \\
x_3 &= F_2 x_2 + w_2 = F_2 F_1 F_0 x_0 + F_2 F_1 w_0 + F_2 w_1 + w_2 \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= F_k x_k + w_k = \prod^{k} F_i x_0 + w_k + \sum^{k-1} B_{i,k-1} w_i
\end{aligned}
$$

其中，$B_{i,k} = \prod_{j=i}^{k} F_j$. 可见，在任何时刻 k, x_k 由高斯分布的 $x_0, w_{k-1}, \cdots, w_0$ 的线性组合构成，因此随机过程 $\{x(k), k = 0, 1, \cdots\}$ 是高斯过程。另外，给定 x_k 下，x_{k+1} 仅依赖于 w_k, 而 w_k 与 $x_0, w_{k-1} \cdots w_0$ 独立，即 w_k 与 $x_{k-1}, \cdots, x_0$ 独立。因此，随机过程 $\{x(k), k = 0, 1, \cdots\}$ 是高斯-马尔可夫过程. ■

Example 3.2.2. 考虑连续时间随机系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t)$$

其中，$\{\boldsymbol{w}(t), t \geq t_0\}$ 是均值为 $\mathbf{0}$ 的高斯独立随机过程，且与高斯随机向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 独立. 判断 $\{\boldsymbol{x}(t), t > t_0\}$ 是什么属性的随机过程.

【解】 对应任意时刻 $t > t_0$, 有

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\boldsymbol{w}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

可见，$\{\boldsymbol{x}(t), t > t_0\}$ 是高斯分布的. 同时，对于 $t > t_1 \geq t_0$ 有

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_1)\boldsymbol{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Phi(t, \tau)\boldsymbol{w}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

可见给定 $\boldsymbol{x}(t_1)$ 条件下，$\{\boldsymbol{x}(t), t > t_1\}$ 只依赖于 $\boldsymbol{w}(\tau)(t_1 \leq \tau \leq t)$, 而 $\boldsymbol{w}(\tau)(t_1 \leq \tau \leq t)$ 与 $\boldsymbol{x}(t)(t < t_1)$ 独立，也就是说 $\{\boldsymbol{x}(t), t > t_1\}$ 与 $\boldsymbol{x}(t)(t < t_1)$ 独立，所以 $\{\boldsymbol{x}(t), t > t_0\}$ 也是一个马尔可夫过程. 因此，$\{\boldsymbol{x}(t), t > t_0\}$ 是高斯-马尔可夫过程. ■

白噪声

对于连续时间随机过程 $\boldsymbol{w}(t)$, 如果其谱密度 (矩阵) 为

$$\Phi(\omega) = Q$$

其中 Q 是非负定常值矩阵，则称 $\boldsymbol{w}(t)$ 为白噪声过程. 根据维纳-辛钦公式 (3.55), 可知

$$\boxed{E\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(t+\tau) = R_W(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Qe^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega = Q\delta(\tau)}$$

对于离散时间随机过程 $\{\boldsymbol{w}(k), k = 0, 1, 2, \cdots\}$, 若

$$\boxed{E\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{w}^T(j) = Q\delta_{ij}, \quad \forall i, j \geq 0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0)$$

Dirac delta function

Kronecker delta function

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

上述讨论是基于功率谱密度的，暗喻了是平稳过程. 其实，我们可能遇到非平稳的干扰信号，为此我们将白噪声概念拓展定义如下.

Definition 3.2.18 (白噪声). 如果随机过程 $\{\boldsymbol{w}(t), t \in T\}$ 时间集上任意的两个时间点 $t_1 \neq t_2$, 对应的随机向量 $\boldsymbol{w}(t_1)$ 与 $\boldsymbol{w}(t_2)$ 相互独立，那么称 $\{\boldsymbol{w}(t), t \in T\}$ 为白噪声; 否则称为有色噪声.

根据定义3.2.18，就可以研究非平稳白噪声信号了. 例如，对于连续时间白噪声

$$\boxed{E\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(t+\tau) = Q(t)\delta(\tau)} \tag{3.73}$$

其中 $Q(t)$ 是随时间变化的非负定矩阵，称为均值为零白噪声 $\{\boldsymbol{w}(t), t \in T\}$ 的功率谱密度矩阵. 对于离散时间白噪声

$$\boxed{E\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^T(j) = Q(k)\delta_{kj}} \tag{3.74}$$

其中 $Q(k)$ 是随时间变化的非负定矩阵，称为均值为零白噪声序列 $\{\boldsymbol{w}(k), t = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的协方差矩阵.

Definition 3.2.19 (维纳过程). 设 $w(t)$ 是连续时间平稳的高斯白噪声，称

$$\boxed{N(t)=\int_0^t w(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

为维纳过程.

根据定义3.2.19, 可以验证维纳过程 $n(t)$ 具有如下性质:

(1) 初值为 0，即 $n(0)=0$;

(2) $n(t)$ 是高斯过程;

(3) $n(t)$ 的均值为零，即 $En(t)=0$;

(4) $n(t)$ 具有平稳独立增量.

$$R_N(t,s)=En(t)n(s)=\sigma^2\min\{t,s\}$$

$$P_N(t)=\sigma_N^2(t)=\sigma^2 t$$

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2 t}}$$

维纳过程是非平稳随机过程

有色噪声仿真方法

- 为了对随机过程或随机系统进行仿真研究，需要产生符合不同分布的随机数；
- 其中的基础是产生均匀分布的随机数；
- 现在的计算机语言都提供了产生均匀分布随机数的标准函数；
- 计算机产生的随机数并非真正的随机数，而是伪随机数；伪随机数的周期充分长，就可以当作随机数来用.

当 N 充分大时，近似地有

设 $x_i \sim U(0,1)$

$$\boxed{y=\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i-0.5}{\sqrt{N/12}} \sim N(0,1)}$$

$$y=\sum_{i=1}^{12}x_i-6$$

$$y=\sum_{i=1}^{6}(x_i-x_{i+5})$$

假设我们能够生成大量独立同分布的随机数，例如 $r_i \sim N(0,1), i=1,2,\cdots$. 那么我们可以非常容易地获得 n 维随机向量 $\boldsymbol{w}$, 一个实现是

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

作为随机向量来说，我们近似生成了 $\boldsymbol{w} \sim N(\mathbf{0}, I_{n\times n})$. $I_{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 维单位矩阵.

一般地，如果 $\boldsymbol{w} \sim N(\mathbf{0}, Q)$, 其中

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

此时就要困难些了.

由于 Q 是协方差矩阵，因此 Q 非负定. 记

$$\boxed{\lambda(Q) = \mu_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n.} \tag{3.83}$$

设上述特征值对应的特征向量为 $\boldsymbol{t}_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 由这些特征向量可以构造变换矩阵 T, 由于 Q 是对称的，所以可以使 T 是正交矩阵，即 $T^T = T^{-1}$. 于是可得

$$\boxed{\bar{Q} = T^T Q T = \mathrm{diag}\{\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2\}} \tag{3.84}$$

定义一个新的随机向量 $\boldsymbol{v} = T^T \boldsymbol{w}$，可见

$$\boxed{E\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T = E(T^T \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T T) = \bar{Q}} \tag{3.85}$$

这样就为我们构造了一个生成 $\boldsymbol{w}$ 的方法.

设 $r_i \sim N(0,1), i = 1, 2, \cdots$ 是独立同分布的随机数，令 $v_i = \mu_i r_i$, 这样就得到了 $\boldsymbol{v} \sim N(\boldsymbol{0}, \bar{Q})$ 的一个实现. 通过反变化 $\boldsymbol{w} = T\boldsymbol{v}$，即得到随机向量 $\boldsymbol{w} \sim N(\boldsymbol{0}, Q)$ 的一个实现. 根据需要就可以生成足够多的随机向量 $\boldsymbol{w}$ 样本了.

随机过程小结

离散随机过程

离散随机序列又称为离散随机过程:

$$\{x(t)\}=\{\cdots,x(-1),x(0),x(1),\cdots\}$$

离散随机过程的一组具体观测值

$$\cdots,\xi(-1),\xi(0),\xi(1),\cdots$$

称为离散随机过程的一个实现或样本函数。

定理

- 高斯随机变量的线性函数仍然是高斯变量；
- 正交的高斯随机变量是相互独立的；
- 对于任意的随机过程，存在一高斯随机过程，二者具有相同的均值和协方差（矩阵）。

随机变量序列的收敛性

强

- 均分收敛
- 以概率1收敛

中

- 依概率收敛

弱

- 依分布函数收敛

随机过程的连续性

依概率连续

均方连续

随机过程的微积分

均方可微

均方可积

常见随机过程

- 平稳随机过程
- 遍历性
- 高斯过程
- 马尔可夫过程
- 独立增量过程
- 维纳过程
- 纯随机过程