次优及鲁棒滤波算法

Prof. Yuan-Li Cai

Spring 2024

0. Outline

1. 引言

在实际应用中，前面介绍的最优滤波算法可能出现两方面的问题. 其一是滤波发散，其二是计算量过大.

所谓滤波发散，是指按给定模型设计的滤波器随量测的数目不断增加时，滤波的均方误差趋于零或某一稳态值，而实际的滤波误差却趋于无穷大或远远超过容许的范围.

造成滤波发散现象的主要原因有两方面:

1. 系统的数学模型与噪声的统计特性不准确;
2. 计算过程中舍入误差不断积累, 使滤波误差协方差矩阵丧失对称性或非负定性, 从而滤波增益的计算值逐渐失真.

滤波计算量太大主要影响高价系统的实时控制. 如果滤波计算的时间太长, 可能超过容许的采样时间, 因而无法实现实时控制.

为此, 我们需要改良卡尔曼滤波算法. 当然希望解决上述问题的同时, 而又使滤波性能损失不致太大. 这样得到的滤波器称为次优滤波器.

2. 衰减记忆滤波

在计算滤波估值时，逐渐减少历史量测数据的影响、相对增加新量测数据的影响，通过抑制舍入误差的积累和传播，可以达到克服滤波发散的目的. 这就是衰减滤波的基本思想.

常见的衰减滤波算法有**指数衰减记忆滤波和几何级数衰减滤波**两种.

2.1 指数衰减记忆滤波

考虑如下离散时间随机系统

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1,k} x_k + \Gamma_k w_k \tag{1}$$

$$y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} \tag{2}$$

其中, $w_k \sim (0,\ Q_k)$ 与 $v_k \sim (0,\ R_k)$ 相互独立, 它们与初始状态 $x_0 \sim (\bar{x}_0,\ P_0)$ 不相关. 另外, 设 $Q_k \geq 0,\ R_k > 0$.

最优滤波可以表达为

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] \Phi_{k+1,k} \hat{x}_{k|k} + K_{k+1} y_{k+1} \tag{3}$$

可见:

- 任意时刻的滤波值 $\hat{x}_{k+1|k+1}$ 是量测数据 $y_1 \sim y_{k+1}$ 及初始估计 $\hat{x}_{0|0}$ 的线性组合.
- 所有的量测噪声的协方差矩阵 $R_1 \sim R_{k+1}$ 和初始估计误差协方差矩阵 $P_{0|0}$ 都进入了 $\hat{x}_{k+1|k+1}$ 的计算.
- 设当前时刻为 N, 如果要降低 y_k 及 $\hat{x}_{0|0}$ 对 $\hat{x}_{N|N}$ 的影响, 可以通过增大 R_k 及 $P_{0|0}$ 的值来实现.

另外，最优滤波也可以表达为

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} \tag{4}$$

- 一步预测和量测信息都直接与系统状态模型 (1) 有关;
- 为了抑制远离当前时刻 N 模型不确定性对 $\hat{x}_{N|N}$ 的影响，可以通过增大 Q_k 的值来实现.

注意到最优增益计算公式为

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \tag{5}$$

或

$$K_{k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \tag{6}$$

如果将 $k+1$ 时刻的量测噪声协方差增加为

$$R_{k+1} \exp[\sum_{i=k+1}^{N} c_i], \quad c_i \geq 0 \tag{7}$$

上式表明根据距离当前时刻 N 的远近加不同的权重，即离当前时刻 N 越远加越大的权重．记

$$P^*_{k+1|k+1} = P_{k+1|k+1} \exp[-\sum_{i=k+1}^{N} c_i] \tag{8}$$

$$P^*_{k+1|k} = P_{k+1|k} \exp[-\sum_{i=k+1}^{N} c_i] \tag{9}$$

那么 (5)、(6) 变为

$$\begin{aligned} K^*_{k+1} &= P^*_{k+1|k} H^T_{k+1} [H_{k+1} P^*_{k+1|k} H^T_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} \\ &= P^*_{k+1|k+1} H^T_{k+1} R^{-1}_{k+1} \end{aligned}$$

考虑一步预测的误差协方差矩阵

$$P_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k} P_{k|k} \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T \tag{10}$$

如果将过程噪声协方差增加为

$$Q_k \exp[\sum_{i=k}^{N} c_i], \quad c_i \geq 0 \tag{11}$$

那么可得

$$P_{k+1|k}^* = [\Phi_{k+1,k} P_{k|k}^* \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T] \exp(c_k) \tag{12}$$

如果将 $P_{0|0}$ 增加为

$$P_{0|0} \exp[\sum_{i=0}^{N} c_i], \quad c_i \geq 0 \tag{13}$$

于是

$$P_{0|0}^{*} = P_{0|0} \tag{14}$$

这样我们便建立了统计特性修改后的滤波算法，如表1所示. 上标“*”代表次优滤波参数.

Table 1: 指数衰减记忆滤波算法

状态方程与量测方程
$x_{k+1} = \Phi_{k+1,k} x_k + \Gamma_k w_k$
$y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}$
滤波初值
$\hat{x}_{0\|0}^{*} = E x_0 = \bar{x}_0, \quad P_{0\|0}^{*} = \mathrm{var}[x_0] = P_0$

一步预测

$$\hat{x}^*_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k}\hat{x}^*_{k|k}$$

$$P^*_{k+1|k} = [\Phi_{k+1,k}P^*_{k|k}\Phi^T_{k+1,k} + \Gamma_k Q_k \Gamma^T_k]\exp(c_k)$$

滤波增益

$$\begin{aligned} K^*_{k+1} &= P^*_{k+1|k}H^T_{k+1}[H_{k+1}P^*_{k+1|k}H^T_{k+1} + R_{k+1}]^{-1} \\ &= P^*_{k+1|k+1}H^T_{k+1}R^{-1}_{k+1} \end{aligned}$$

滤波计算

$$\hat{x}^*_{k+1|k+1} = \hat{x}^*_{k+1|k} + K^*_{k+1}[y_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}^*_{k+1|k}]$$

$$P^*_{k+1|k+1} = [I - K^*_{k+1}H_{k+1}]P^*_{k+1|k}$$

由表1不难发现，指数衰减记忆滤波与常规卡尔曼滤波的区别仅在于一步预测误差的协方差矩阵.

2.2 几何级数衰减记忆滤波

在指数衰减记忆滤波算法中，如果取 $c_0 = c_1 = \cdots = c_N = c \geq 0$，并记 $s = \exp(c)$，我们便得到几何级数衰减滤波算法. 一步预测误差的协方差矩阵计算公式便为

$$P^*_{k+1|k} = [\Phi_{k+1,k} P^*_{k|k} \Phi^T_{k+1,k} + \Gamma_k Q_k \Gamma^T_k] s \tag{15}$$

表1中其他公式不变.

在任意的 N 时刻，几何级数衰减滤波相当于将量测噪声协方差矩阵调整为

$$s^{N-k}R_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{16}$$

将过程噪声协方差矩阵调整为

$$s^{N-k}Q_k, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{17}$$

而初始估计的误差协方差调整为

$$s^N P_{0|0} \tag{18}$$

显然，几何级数衰减滤波算法是指数衰减记忆滤波算法的一种特例.

关于衰减记忆滤波详细论述见 H.W. Sorenson, J.E. Sacks, Recursive fading memory filtering, Information Sciences, Volume 3, Issue 2, 1971, Pages 101-119.

3. 限定记忆滤波

标准卡尔曼滤波器对量测数据的记忆是无限增长的，即计算 $\hat{x}_{k|k}$ 时用到了所有过去的量测值. 而所谓限定记忆滤波计算 $\hat{x}_{k|k}$ 时，只用到离 k 时刻最近的 N 个量测值 $\{y_{k-N+1}, y_{k-N+2}, \cdots, y_k\}$，完全截断了 $k-N+1$ 时刻以前量测数据对滤波值的影响.

3.1 量测数据分组

将量测数据进行如下分组:

$$y^k = \{y_1, y_2, \cdots, \underbrace{y_d, \overbrace{y_{d+1}, \cdots, y_{k-1}, y_k}^{y_{d+1}^k}}_{y_d^k}\} \tag{19}$$

$$y_d^{k-1} = \{y_d, \cdots, y_{k-2}, y_{k-1}\} \tag{20}$$

注意，y^k 表示所有到 k 时刻的量测值；y_{d+1}^k 表示 $d+1$ 时刻到 k 时刻的 N 个量测值；y_d^{k-1} 表示 d 时刻到 $k-1$ 时刻的 N 个量测值；y_d^k 表示 d 时刻到 k 时刻的 $N+1$ 个量测值.

我们的目标是获得 x_k 基于 y_{d+1}^k 的最优估计 (线性最小方差估计)，并建立递推算法.

3.2 递推算法

为描述方便，研究如下不含过程噪声的随机动态系统

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1,k} x_k \tag{21}$$

$$y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} \tag{22}$$

其中，$v_k \sim (0,\ R_k)$ 是与初始状态 $x_0 \sim (\bar{x}_0,\ P_0)$ 不相关的噪声，$R_k > 0$.

设基于 y_d^{k-1} 对 x_k 的线性最小方差估计为 $\hat{x}_{k|k-1}^N$，对 x_{k-1} 的线性最小方差估计为 $\hat{x}_{k-1|k-1}^N$. 那么

$$\hat{x}_{k|k-1}^N = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}^N \tag{23}$$

基于 y_d^k 对 x_k 的线性最小方差估计为

$$\hat{x}_{k|k}^{N+1} = \hat{x}_{k|k-1}^N + J_k[y_k - H_k\hat{x}_{k|k-1}^N] \tag{24}$$

其中

$$J_k = P_{k|k-1}^N H_k^T [H_k P_{k|k-1}^N H_k^T + R_k]^{-1} \tag{25}$$

$$P_{k|k-1}^N = \Phi_{k,k-1} P_{k-1|k-1}^N \Phi_{k,k-1}^T \tag{26}$$

$$P_{k|k}^{N+1} = [I - J_k H_k] P_{k|k-1}^N = [(P_{k|k-1}^N)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k]^{-1} \tag{27}$$

上述公式实际上完全套用了标准卡尔曼滤波公式.

又设基于 y_{d+1}^k 对 x_k 的线性最小方差估计为 $\hat{x}_{k|k}^N$，基于 y_d^k 对 x_k 的线性最小方差估计为 $\hat{x}_{k|k}^{N+1}$. 显然，$\hat{x}_{k|k}^{N+1}$ 比 $\hat{x}_{k|k}^N$ 多用了一个量测数据 y_d.

由 (21) 和 (22) 可知

$$y_d = H_d x_d + v_d = H_d \Phi_{d,k} x_k + v_d \tag{28}$$

因此

$$\hat{x}_{k|k}^{N+1} = \hat{x}_{k|k}^N + \bar{J}_k [y_d - H_d \Phi_{d,k} \hat{x}_{k|k}^N] \tag{29}$$

其中

$$\bar{J}_k = P_{k|k}^N \Phi_{d,k}^T H_d^T [\Phi_{d,k} H_d P_{k|k}^N H_d^T \Phi_{d,k}^T + R_d]^{-1}$$

$$P_{k|k}^N = E\tilde{x}_{k|k}^N (\tilde{x}_{k|k}^N)^T$$

$$P_{k|k}^{N+1} = [I - \bar{J}_k H_d \Phi_{d,k}] P_{k|k}^N = [(P_{k|k}^N)^{-1} + \Phi_{d,k}^T H_d^T R_d^{-1} H_d \Phi_{d,k}]^{-1}$$

由 (24)、(29) 可知

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k}^N - \hat{x}_{k|k-1}^N &= J_k[y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}^N] - \bar{J}_k[y_d - H_d \Phi_{d,k} \hat{x}_{k|k}^N] \\ &= J_k[y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}^N] - \bar{J}_k[y_d - H_d \Phi_{d,k} \hat{x}_{k|k-1}^N] \\ &+ \bar{J}_k H_d \Phi_{d,k}[\hat{x}_{k|k}^N - \hat{x}_{k|k-1}^N]\end{aligned}$$

即

$$\hat{x}_{k|k}^{N}-\hat{x}_{k|k-1}^{N}=[I-\bar{J}_k H_d\Phi_{d,k}]^{-1}\{J_k[y_k-H_k\hat{x}_{k|k-1}^{N}]-\bar{J}_k[y_d-H_d\Phi_{d,k}\hat{x}_{k|k-1}^{N}]\}$$

令

$$K_k=[I-\bar{J}_k H_d\Phi_{d,k}]^{-1}J_k \tag{30}$$

$$\bar{K}_k=[I-\bar{J}_k H_d\Phi_{d,k}]^{-1}\bar{J}_k \tag{31}$$

我们得到

$$\hat{x}_{k|k}^{N}-\hat{x}_{k|k-1}^{N}=K_k[y_k-H_k\hat{x}_{k|k-1}^{N}]-\bar{K}_k[y_d-H_d\Phi_{d,k}\hat{x}_{k|k-1}^{N}]$$

注意到 (23)，最后可得

$$\hat{x}^N_{k|k} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}^N_{k-1|k-1} + K_k[y_k - H_k\Phi_{k,k-1}\hat{x}^N_{k-1|k-1}] - \bar{K}_k[y_d - H_d\Phi_{d,k}\Phi_{k,k-1}\hat{x}^N_{k-1|k-1}] \quad (32)$$

此外，整理可得

$$K_k = P^N_{k|k}H_k^T R_k^{-1}, \quad \bar{K}_k = P^N_{k|k}\Phi^T_{d,k}H_d^T R_d^{-1} \quad (33)$$

还有

$$(P^N_{k|k})^{-1} = \Phi^T_{k,k-1}(P^N_{k-1|k-1})^{-1}\Phi_{k,k-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k - \Phi^T_{d,k}H_d^T R_d^{-1} H_d\Phi_{d,k} \quad (34)$$

公式 (32)~ (34) 构成了一套限定记忆滤波递推计算算法，适用于 $k > N$. 但滤波初值还需要进一步研究.

3.3 初始条件

当 $k \le N$ 时，量测数据长度小于记忆长度 N，尚不能进行限定记忆滤波计算，只能采用常规卡尔曼滤波算法. 即从 $\hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0$, $P_{0|0} = \mathrm{var}[x_0]$ 出发，采用常规卡尔曼滤波算法得到 $\hat{x}_{N|N}$ 和 $P_{N|N}$. 但从 $k = N+1$ 以后，不能将 $\hat{x}_{N|N}$ 和 $P_{N|N}$ 作为限定记忆滤波的初值 $\hat{x}^N_{N|N}$ 和 $P^N_{N|N}$，否则 $\hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0$, $P_{0|0} = \mathrm{var}[x_0]$ 将一直影响到后续的滤波计算. 这和限定记忆滤波的基本思想是相悖的.

对于时刻 N 的状态 x_N，我们除了从常规卡尔曼滤波算法得到 $\hat{x}_{N|N}$ 和 $P_{N|N}$ 外，还可以建立两种估计．一是用 $\{y_1, \cdots, y_N\}$ 得到的 $\hat{x}^N_{N|N}$ 和 $P^N_{N|N}$，另一是基于 x_0 验前信息的估计．后者实际上是 N 步预测，其估计值为 $\Phi_{N,0}\hat{x}_{0|0}$，估计的误差协方差矩阵为 $\Phi_{N,0}P_{0|0}\Phi^T_{N,0}$．

基于融合估计原理，我们有

$$\hat{x}_{N|N} = P_{N|N}[(P^N_{N|N})^{-1}\hat{x}^N_{N|N} + \Phi^T_{0,N}P^{-1}_{0|0}\hat{x}_{0|0}]$$

$$P^{-1}_{N|N} = (P^N_{N|N})^{-1} + \Phi^T_{0,N}P^{-1}_{0|0}\Phi_{0,N}$$

由此我们便可建立限定记忆滤波递推计算初值计算公式如下:

$$\hat{x}_{N|N}^{N} = P_{N|N}^{N}[P_{N|N}^{-1}\hat{x}_{N|N} - \Phi_{0,N}^{T}P_{0|0}^{-1}\hat{x}_{0|0}] \tag{35}$$

$$P_{N|N}^{N} = [P_{N|N}^{-1} - \Phi_{0,N}^{T}P_{0|0}^{-1}\Phi_{0,N}]^{-1} \tag{36}$$

经典参考文献: A. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 13, no. 5, pp. 558-563, October 1968, doi: 10.1109/TAC.1968.1098981.

4. 协方差平方根滤波

除了模型不准确会引起滤波发散外，计算舍入误差的积累也会引发滤波发散. 主要原因是 $P_{k|k}$、$P_{k|k-1}$ 在计算过程中丧失了应该具有的对称性、非负定性.

4.1 矩阵的下三角分解

对于任意的对称非负定矩阵 P，均可分解为

$$P = SS^T \tag{37}$$

其中 S 是一个下三角矩阵，称为 P 矩阵的平方根矩阵. 如果 P 矩阵是正定的，那么 S 矩阵还将是非奇异的.

MATLAB 内嵌函数 chol 可以完成矩阵的下三角分解，例如 $S = chol(P)'$。三阶矩阵平方根分解算法见式 (38).

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{21} & p_{22} & p_{32} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{21} & c_{11}c_{31} \\ c_{11}c_{21} & c_{21}^2 + c_{22}^2 & c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} \\ c_{11}c_{31} & c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} & c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

一般地，设

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & s_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ s_{n1} & \cdots & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

由 (37) 可得

$$s_{ii} = \sqrt{p_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij}^2} \tag{39}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ \frac{1}{s_{jj}}\left(p_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{ik}s_{jk}\right), & i > j \end{cases} \tag{40}$$

4.2 平方根滤波基本思想

考虑无过程噪声、标量量测情况下的系统

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} \tag{41}$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{42}$$

其中，$v_k \sim (0,\ R_k)$ 是与初始状态 $x_0 \sim (\bar{x}_0,\ P_0)$ 不相关的噪声，$R_k > 0$. 该系统的卡尔曼滤波基本方程为

$$\hat{x}_{k|k} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + K_k[y_k - H_k\Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1|k-1}] \tag{43}$$

$$K_k = P_{k|k-1}H_k^T[H_kP_{k|k-1}H_k^T + R_k]^{-1} \tag{44}$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1}P_{k-1|k-1}\Phi_{k,k-1}^T \tag{45}$$

$$P_{k|k} = [I - K_kH_k]P_{k|k-1} \tag{46}$$

设

$$P_{k|k} = S_{k|k}S_{k|k}^T \tag{47}$$

由 (45) 可得

$$P_{k|k-1} = S_{k|k-1} S_{k|k-1}^T \tag{48}$$

其中 $S_{k|k-1} = \Phi_{k,k-1} S_{k-1|k-1}$. 而由 (44)、(46) 可得

$$P_{k|k} = S_{k|k-1}\{I - F_k[F_k^T F_k + R_k]^{-1} F_k^T\} S_{k|k-1}^T \tag{49}$$

其中 $F_k = S_{k|k-1}^T H_k^T$.

考虑到

$$\alpha_k = [F_k^T F_k + R_k]^{-1} \tag{50}$$

是一标量，(49) 即为

$$P_{k|k} = S_{k|k}[I - \alpha_k F_k F_k^T] S_{k|k-1}^T \tag{51}$$

如果令

$$I - \alpha_k F_k F_k^T = [I - r_k \alpha_k F_k F_k^T][I - r_k \alpha_k F_k F_k^T]^T \tag{52}$$

那么

$$2r_k - r_k^2 \alpha_k F_k F_k^T = 1 \tag{53}$$

计及 (50)，上式即为

$$2r_k - r_k^2[1 - \alpha_k R_k] = 1 \tag{54}$$

由此可解出

$$r_k = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\alpha_k R_k}} \tag{55}$$

(49) 于是可化为

$$P_{k|k} = S_{k|k-1}[I - r_k \alpha_k F_k F_k^T][I - r_k \alpha_k F_k F_k^T]^T S_{k|k-1}^T \tag{56}$$

考虑到 (47)，我们得到

$$S_{k|k} = S_{k|k-1}[I - r_k \alpha_k F_k F_k^T] \tag{57}$$

另外，注意到

$$[H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} = [F_k^T F_k + R_k]^{-1} = \alpha_k \tag{58}$$

滤波增益 (44) 即为

$$K_k = \alpha_k P_{k|k-1} H_k^T = \alpha_k S_{k|k-1} F_k \tag{59}$$

这样我们就建立起无过程噪声、标量量测情况下的协方差平方根滤波算法，汇总于表2中.

Table 2: 协方差平方根滤波算法

状态方程与量测方程
$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1}$
$y_k = H_k x_k + v_k$
$v_k \sim (0, R_k), \quad x_0 \sim (\bar{x}_0, P_0)$

滤波方程 $$\hat{x}_{k\|k} = \Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1\|k-1} + K_k[y_k - H_k\Phi_{k,k-1}\hat{x}_{k-1\|k-1}]$$
滤波增益 $$K_k = \alpha_k S_{k\|k-1} F_k$$
协方差平方根 $$S_{k\|k} = S_{k\|k-1}[I - r_k\alpha_k F_k F_k^T]$$ $$S_{k\|k-1} = \Phi_{k,k-1} S_{k-1\|k-1}$$
其他方程 $$\alpha_k = [F_k^T F_k + R_k]^{-1}$$ $$F_k = S_{k\|k-1}^T H_k^T$$

$r_k = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\alpha_k R_k}}$

扩展阅读: P. Kaminski, A. Bryson and S. Schmidt, "Discrete square root filtering: A survey of current techniques," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 16, no. 6, pp. 727-736, December 1971, doi: 10.1109/TAC.1971.1099816.

K. P. B. Chandra, D. Gu and I. Postlethwaite, "Square Root Cubature Information Filter," in IEEE Sensors Journal, vol. 13, no. 2, pp. 750-758, Feb. 2013, doi: 10.1109/JSEN.2012.2226441.

Carraro, Carlo, and Domenico Sartore. "Square Root Iterative Filter: Theory and Applications to Econometric Models." Annales D'Économie Et De Statistique, no. 6/7 (1987): 435-59. Accessed April 8, 2021. doi:10.2307/20075664.

5. 自适应滤波

所谓自适应滤波，就是利用量测数据进行滤波的同时，不断地估计和修正模型中不精确的参数和噪声统计特性.

5.1 卡尔曼滤波的新息序列

仅研究线性定常系统，即

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma w_k \tag{60}$$

$$y_{k+1} = H x_{k+1} + v_{k+1} \tag{61}$$

其中，$w_k \sim (0, Q)$ 与 $v_k \sim (0, R)$ 是互不相关的白噪声，它们与初始状态 $x_0 \sim (\bar{x}_0, P_0)$ 不相关. 另外，设 $Q \geq 0, R > 0$.

该系统的卡尔曼滤波器为

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \Phi\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} \tag{62}$$

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{k+1|k} = y_{k+1} - H\Phi\hat{x}_{k|k} \tag{63}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}H^T[HP_{k+1|k}H^T + R]^{-1} \tag{64}$$

$$P_{k+1|k} = \Phi P_{k|k}\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T \tag{65}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - KH]P_{k+1|k} \tag{66}$$

根据最优估计无偏性和随机正交原理，有

$$E\tilde{y}_k = 0, \forall k > 0 \tag{67}$$

$$E\tilde{y}_k\tilde{y}_j^T = 0, \forall k \neq j, k, j > 0 \tag{68}$$

(67) 和 (68) 表明，新息序列 $\{\tilde{y}_k, k > 0\}$ 是一均值为零的白噪声序列，其协方差阵为

$$P_{\tilde{y}_{k+1}} = E\tilde{y}_{k+1}\tilde{y}_{k+1}^T = HP_{k+1,k}H^T + R \tag{69}$$

如果 Q 与 R 不精确时，按 (62)~(66) 计算出的 $\hat{x}_{k|k}$ 将不是状态 x_k 的最优估计，新息序列 $\{\tilde{y}_k, k > 0\}$ 也将不是白色的. 后者是自适应滤波算法的基本出发点.

5.2 量测噪声 R 不精确

由于 R 阵不确知，需要不断进行估计，记时刻 k 的估计为 R_k. 如果时刻 k 及以前的 $\hat{x}_{k|k}$ 接近最优，那么 $\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \cdots, \tilde{y}_k\}$ 将接近白噪声序列，其协方差矩阵的估计为

$$E\tilde{y}_k\tilde{y}_k^T = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_i\tilde{y}_i^T \tag{70}$$

结合到 (69)，我们有

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\tilde{y}_i\tilde{y}_i^T - HP_{k+1,k}H^T \tag{71}$$

以此代入前面的卡尔曼滤波公式，便得到了此种情况下的自适应滤波算法：

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \Phi\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} \tag{72}$$

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{k+1|k} = y_{k+1} - H\Phi\hat{x}_{k|k} \tag{73}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}H^T(P_{\tilde{y}_{k+1}})^{-1} \tag{74}$$

$$P_{k+1|k} = \Phi P_{k|k}\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T \tag{75}$$

$$P_{\tilde{y}_{k+1}} = \frac{k}{k+1}P_{\tilde{y}_k} + \frac{1}{k+1}\tilde{y}_{k+1}\tilde{y}_{k+1}^T \tag{76}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - KH]P_{k+1|k} \tag{77}$$

上述算法与卡尔曼滤波基本公式的主要差异在于 (76), 其滤波初值为

$$\hat{x}_{0|0} = Ex_0 = \bar{x}_0 \tag{78}$$

$$P_{0|0} = \mathrm{var}[x_0] = P_0 \tag{79}$$

$P_{\tilde{y}_0} = 0$ 或取定 $P_{\tilde{y}_1}$.

5.3 过程噪声 Q 不精确

记过程噪声协方差阵的估计值为 Q_k，类似地可以建立如下自适应滤波算法：

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \Phi\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} \tag{80}$$

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{k+1|k} = y_{k+1} - H\Phi\hat{x}_{k|k} \tag{81}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}H^T[HP_{k+1|k}H^T + R]^{-1} \tag{82}$$

$$P_{k+1|k} = \Phi P_{k|k}\Phi^T + \Gamma Q_k\Gamma^T \tag{83}$$

$$Q_k = \Gamma_A P_{\tilde{y}_{k+1}} \Gamma_A^T - R^* - \Gamma_B P_{k|k} \Gamma_B^T \tag{84}$$

$$P_{\tilde{y}_{k+1}} = \frac{k}{k+1} P_{\tilde{y}_k} + \frac{1}{k+1} \tilde{y}_{k+1} \tilde{y}_{k+1}^T \tag{85}$$

$$P_{k+1|k+1} = [I - KH] P_{k+1|k} \tag{86}$$

其中 $\Gamma_A = [(H\Gamma)^T (H\Gamma)]^{-1} (H\Gamma)^T, \Gamma_B = \Gamma_A H \Phi, R^* = \Gamma_A R \Gamma_A^T$.

滤波初值为 $\hat{x}_{0|0} = E x_0 = \bar{x}_0, P_{0|0} = \mathrm{var}[x_0] = P_0, P_{\tilde{y}}(0) = 0.$

5.4 Q 与 R 同时不精确

当过程噪声和量测噪声都不精确时，可以先选取一个适当的量测噪声协方差阵 R（通常这是比较容易做到的），并把它固定下来，然后按过程噪声都不精确的情况来设计自适应滤波器.

课外阅读：William C. Louv，Adaptive Filtering，Technometrics, Vol. 26, No. 4 (Nov., 1984), pp. 399-409

6. 常值增益次优滤波

在卡尔曼滤波算法中，最主要的计算量来自卡尔曼增益矩阵的计算. 为了减少卡尔曼滤波算法的计算量，可以合理地简化卡尔曼增益矩阵的计算.

由于滤波的稳态对工程实际具有特别的重要性，如果卡尔曼增益矩阵的稳态值为 K_∞，取

$$K_{k+1} = K_\infty \tag{87}$$

从而形成常值增益次优滤波.

对于定常离散时间系统

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma w_k \tag{88}$$

$$y_{k+1} = H x_{k+1} + v_{k+1} \tag{89}$$

其中，$w_k \sim (0, Q)$ 与 $v_k \sim (0, R)$ 是互不相关的白噪声，它们与初始状态 $x_0 \sim (\bar{x}_0, P_0)$ 不相关. 另外，设 $Q \geq 0$, $R > 0$.

如果系统是完全能控和完全能观的，则有

$$K_\infty = \lim_{k\to\infty} K_k \tag{90}$$

$$P_\infty = \lim_{k\to\infty} P_{k|k} \tag{91}$$

$$\bar{P} = \lim_{k\to\infty} P_{k|k-1} \tag{92}$$

而且

$$K_\infty = \bar{P}H^T(H\bar{P}H^T + R)^{-1} \tag{93}$$

$$P_\infty = (I - K_\infty H)\bar{P} \tag{94}$$

$$\bar{P} = \Phi P_\infty \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \tag{95}$$

关于常值增益次优滤波，我们有如下结论.

Theorem 6.1 如果所研究的系统完全能控和完全能观，则存在常值增益滤波器

$$\hat{x}^*_{k+1|k+1} = \bar{\Phi}\hat{x}^*_{k|k} + K_\infty y_{k+1}, \quad \hat{x}^*_{0|0} = \bar{x}_0$$

$$P^*_{k+1|k+1} = \bar{\Phi}P^*_{k|k}\bar{\Phi}^T + \bar{Q}, \quad P^*_{0|0} = P_0$$

它在滤波初始阶段是次优的，而在稳态则是最优的. 式中:

$$\bar{\Phi} = (I - K_\infty H)\Phi$$

$$\bar{Q} = (I - K_\infty H)\Gamma Q \Gamma^T (I - K_\infty H)^T + K_\infty R K_\infty^T$$

稳态增益 K_∞ 由 (93) 唯一给出.

扩展阅读: D. Kleinman and M. Athans, "The design of suboptimal linear

time-varying systems," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 13, no. 2, pp. 150-159, April 1968, doi: 10.1109/TAC.1968.1098852.

E. I. Silva and M. A. Solis, "An Alternative Look at the Constant-Gain Kalman Filter for State Estimation Over Erasure Channels," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 58, no. 12, pp. 3259-3265, Dec. 2013, doi: 10.1109/TAC.2013.2263647.

6. 小结

次优滤波器的目的主要有两方面：抑制滤波发散与降低计算量. 目前研究发展出了许多次优滤波算法，这里仅讨论了其中比较重要或已经获得广泛认同的结果. 在实际工程应用中，可以根据具体情况进行相应的研究. 例如，对高价系统采用强制解耦、状态变量分组以及序贯滤波等方法，都是减少滤波算法计算量的有效途径.

□

Questions?