

The background of the slide features a pattern of thin, dark grey, overlapping circles of various sizes, creating a complex, web-like geometric design.

【容积卡尔曼滤波及其改进算法】

Dr. Yuan-Li Cai

Spring • 2024

0. Outline

- 1 贝叶斯递推滤波框架 / 4
- 2 容积数值积分 / 8
- 3 容积卡尔曼滤波算法 / 15
- 4 平方根容积卡尔曼滤波算法 / 21
- 5 迭代容积卡尔曼滤波算法 / 27
- 6 递推后验克拉美罗下限 / 33

7 再入弹道目标状态估计仿真 / 47

8 小结 / 66

考虑如下离散时间非线性系统:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中: $\mathbf{f}(\cdot): \mathcal{R}^{n_x} \rightarrow \mathcal{R}^{n_x}$, $\mathbf{h}(\cdot): \mathcal{R}^{n_x} \rightarrow \mathcal{R}^{n_y}$ 。 $\mathbf{x}_k$ 是维数为 n_x 的状态向量, $\mathbf{y}_k$ 是维数为 n_y 的量测. 假设过程噪声 $\mathbf{w}_{k-1}$ 和量测噪声 $\mathbf{v}_k$ 相互独立, 且 $\mathbf{w}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_{k-1})$, $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$ 。

1. 贝叶斯递推滤波框架

在 $k - 1$ 时刻, 假设状态 $\boldsymbol{x}_{k-1}$ 近似服从高斯分布, 已经获得了 $\boldsymbol{x}_{k-1} \sim p(\boldsymbol{x}_{k-1} | \boldsymbol{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{P}_{k-1})$ 。

1.1 时间更新

下面，我们用上标“-”表示一步预测相关量。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^- &= E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1}] \\ &= E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}] = E[\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) | \mathbf{Y}_{k-1}] \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k^- &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T | \mathbf{Y}_{k-1}] \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^- (\hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1}\end{aligned}\quad (4)$$

1.2 量测更新

如果近似认为 $\mathbf{x}_k \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-)$, 于是可求出量测预测和新息方差:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = E[\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{k-1}] = \int_{\mathcal{R}^{n-x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) d\mathbf{x}_k \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{yy,k} = \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) d\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^- (\hat{\mathbf{y}}_k^-)^T + \mathbf{R}_k \quad (6)$$

那么, 可以认为似然密度函数服从高斯分布 $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{Y}_k) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{y}}_k^-, \mathbf{P}_{yy,k})$ 。进一步可导出

$$\mathbf{P}_{xy,k} = \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_k) \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-) d\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \hat{\mathbf{y}}_k^- \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k} (\mathbf{P}_{yy,k})^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k} \mathbf{K}_k^T \quad (10)$$

最后, k 时刻的后验概率密度近似地为 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k)$ 。

2. 容积数值积分

在上述贝叶斯滤波框架下，状态估计的核心是计算式 (3)-(7) 中的多维积分，即非线性滤波的关键是非线性函数和高斯概率密度乘积的积分问题。

考虑如下非线性函数的带权积分问题：

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}) = \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} \quad (11)$$

式中： $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f})$ 为所求积分， $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^{n_x}$ ， $\mathcal{R}^{n_x}$ 为积分域， $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为非线性函数。

式 (11) 的积分可使用基于容积原则的数值积分方法进行求解。首先, 令 $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{s}$, 取 $\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} = 1$, 那么 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = r^2, r \in [0, \infty)$, 于是式 (11) 变换为球形-径向积分形式, 即

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{f}) = \int_0^{+\infty} \int_{U_n} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{s}) r^{n-1} \exp(-r^2) d\sigma(\boldsymbol{s}) dr \quad (12)$$

式中, $U_n = \{\boldsymbol{s} \in \mathcal{R}^n | \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} = 1\}$ (球面), $\sigma(\cdot)$ 为 U_n 的面积单元。

令

$$S(r) = \int_{U_n} \boldsymbol{f}(r\boldsymbol{s}) d\sigma(\boldsymbol{s}) \quad (13)$$

式 (12) 可表示为

$$I(\mathbf{f}) = \int_0^\infty S(r)r^{n-1} \exp(-r^2)dr \quad (14)$$

该式称为径向积分。

式 (13) 的球形积分可使用基于球形容积原则的数值积分方法近似为

$$S(r) = \int_{U_n} \mathbf{f}(r\mathbf{s})d\sigma(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{m_s} b_j \mathbf{f}(r\mathbf{s}_j) \quad (15)$$

式中： m_s 为积分点数。

若使用三阶球形容积原则，相关参数为： $m_s = 2n_x$, $b_j = \frac{A_n}{2n}$, 其中 $A_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(n/2)}$, $\Gamma(n/2) = \int_0^\infty x^{n-1} \exp(-x)dx$ 。

$\mathbf{s}_j = [\mathbf{1}]_j$ 表示积分点, 产生方式为: 记 n_x 维单位向量为 $\mathbf{e} = [1, 0, \dots, 0]^T$, 使用 $[\mathbf{1}]$ 表示对 $\mathbf{e}$ 的元素进行全排列和改变元素符号产生的点集, 称为完整全对称点集, $[\mathbf{1}]_j$ 表示点集中 $[\mathbf{1}]$ 的第 j 个点。

以 $n_x = 3$ 为例, $[\mathbf{1}]$ 表示所示的点集如下:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

使用基于高斯积分原则的数值积分方法来近似计算径向积分 (14), 可表示为

$$I(f) = \int_0^{+\infty} S(r)r^{n-1} \exp(-r^2)dr = \sum_{i=1}^{m_r} a_i S(r_i) \quad (16)$$

式中: m_r 为积分点数。如果采用一阶高斯-塞德尔积分, 那么 $m_r = 1$, $a_1 = \Gamma(n/2)/2$, $r_1 = \sqrt{n/2}$ 。

基于 (15) 和 (16) 可获得 (12) 的 3 阶球形-径向数值积分近似:

$$\int_{\mathcal{R}^{n_x}} f(\mathbf{x}) \exp(-\mathbf{x}^T \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{2n_x} \frac{\sqrt{\pi^{n_x}}}{2n_x} f\left(\sqrt{\frac{n_x}{2}} [\mathbf{1}]_i\right) \quad (17)$$

使用 (17) 式可求得标准正态分布函数的 3 阶球形-径向数值积分如下:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{N}}(\mathbf{f}) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_x(\mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_i) \quad (18)$$

式中: $\boldsymbol{\xi}_i$ 为基本容积点, ω_i 为容积点对应的权值。 $\boldsymbol{\xi}_i$ 和 ω_i 的取值分别为

$$\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{\frac{m}{2}} [\mathbf{1}]_i, \quad \omega_i = \frac{1}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, m = 2n_x \quad (19)$$

(18) 式中, 权值为标准正态分布函数。对于一般的正态分布函数 $\mathcal{N}_x(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 对应的非线性积分为

$$\int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_x(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|}} \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} d\mathbf{x} \quad (20)$$

分解 $\Sigma = \sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma}^T$, 然后进行变换 $\mathbf{x} = \sqrt{\Sigma}\mathbf{y} + \mu$, 上式可化为

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_x(\mu, \Sigma) d\mathbf{x} &= \frac{1}{\sqrt{|2\pi\Sigma|}} \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\sqrt{\Sigma}\mathbf{y} + \mu) \sqrt{|\Sigma|} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{y}} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\sqrt{\Sigma}\mathbf{y} + \mu) \mathcal{N}_y(\mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{y}\end{aligned}\quad (21)$$

由 (18) 式, 可得上式的 3 阶球形-径向数值积分近似解:

$$\int_{\mathcal{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathcal{N}_x(\mu, \Sigma) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{f}(\sqrt{\Sigma}\boldsymbol{\xi}_i + \mu) \quad (22)$$

3. 容积卡尔曼滤波算法

基于容积积分原则的卡尔曼滤波方法，即称为容积卡尔曼滤波方法 (Cubature Kalman Filter, CKF)。

若 $k-1$ 时刻的后验概率为 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})$ ，容积卡尔曼滤波算法步骤如下：

3.1 时间更新

3.1.1 计算方差的平方根和容积点

$$\mathbf{S}_{k-1} = \text{chol}\{\mathbf{P}_{k-1}\} \quad (23)$$

$$\mathbf{X}_{j,k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_j + \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (24)$$

式中, chol 表示矩阵的 Cholesky 分解。

3.1.2 计算通过非线性状态方程传播的容积点

$$\mathbf{X}_{j,k}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{j,k-1}) \quad (25)$$

3.1.3 计算状态预测及其方差

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{X}_{j,k}^* \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{X}_{j,k}^* \mathbf{X}_{j,k}^{*\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \hat{\mathbf{x}}_k^{-\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (27)$$

3.2 量测更新

3.2.1 计算预测方差的平方根和容积点

$$\mathbf{S}_k^- = \text{chol}(\mathbf{P}_k^-) \quad (28)$$

$$\mathbf{X}_{j,k} = \mathbf{S}_k^- \boldsymbol{\xi}_j + \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (29)$$

3.2.2 计算通过非线性量测方程传播的容积点

$$\mathbf{Z}_{j,k} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{j,k}) \quad (30)$$

3.2.3 计算量测预测、新息方差和协方差估计

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{Z}_{j,k} \quad (31)$$

$$\mathbf{P}_{yy,k} = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{Z}_{j,k} \mathbf{Z}_{j,k}^T - \hat{\mathbf{y}}_k^- \hat{\mathbf{y}}_k^{-T} + \mathbf{R}_k \quad (32)$$

$$\mathbf{P}_{xy,k} = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{X}_{j,k} \mathbf{Z}_{j,k}^T - \hat{\mathbf{x}}_k^- \hat{\mathbf{y}}_k^{-T} \quad (33)$$

3.2.4 计算增益，状态和协方差估计

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k} [\mathbf{P}_{yy,k}]^{-1} \quad (34)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k} \mathbf{K}_k^T \quad (36)$$

上述公式 (23) ~ (36) 便构成了基本的容积卡尔曼滤波算法，初始条件为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$, $\mathbf{P}_0 = \text{Cov}(\mathbf{x}_0)$ 。

4. 平方根容积卡尔曼滤波算法

容积卡尔曼滤波算法中，每一步滤波时需要对方差矩阵进行 Cholesky 分解。为了提高算法的数值稳定性和鲁棒性，可建立平方根容积卡尔曼滤波算法。

若 $k-1$ 时刻的后验概率为 $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_{k-1}) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1})$ ，且获得了方差矩阵 $\mathbf{P}_{k-1}$ 的平方根矩阵 $\mathbf{S}_{k-1}$ ，即 $\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{S}_{k-1}\mathbf{S}_{k-1}^T$ ，则平方根容积卡尔曼滤波算法的步骤如下：

4.1 时间更新

1) 计算容积点

$$\mathbf{X}_{j,k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_j + \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (37)$$

2) 计算通过状态方程传播的容积点

$$\mathbf{X}_{j,k}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{j,k-1}) \quad (38)$$

3) 计算状态预测和预测方差矩阵的平方根

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{X}_{i,k}^* \quad (39)$$

$$\mathbf{S}_k^- = \text{Tri}a([\mathbf{x}_k^*, \mathbf{S}_{Q,k-1}]) \quad (40)$$

式中: $\mathbf{S}_{Q,k-1} = \text{chol}(\mathbf{Q}_{k-1})$, $\text{Tri}a()$ 表示对矩阵进行三角化, 获得一方阵。
矩阵 $\mathbf{x}_k^*$ 定义为

$$\mathbf{x}_k^* = m^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{X}_{1,k}^* - \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{X}_{2,k}^* - \hat{\mathbf{x}}_k^-, \dots, \mathbf{X}_{m,k}^* - \hat{\mathbf{x}}_k^-] \quad (41)$$

4.2 测量更新

1) 计算容积点

$$\mathbf{X}_{j,k} = \mathbf{S}_k^- \boldsymbol{\xi}_j + \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (42)$$

2) 计算通过测量方程传播的容积点和测量预测

$$\mathbf{Z}_{j,k} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{j,k}) \quad (43)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{Z}_{i,k} \quad (44)$$

3) 计算新息方差的平方根和协方差

$$\mathbf{S}_{zz,k} = \text{Tri}a([\mathbf{A}_k, \mathbf{S}_{R,k}]) \quad (45)$$

$$\mathbf{P}_{xy,k} = \boldsymbol{\chi}_k \mathbf{A}_k^T \quad (46)$$

其中, $\mathbf{S}_{R,k} = \text{chol}(\mathbf{R}_k)$, 矩阵 $\boldsymbol{\chi}_k$ 和 $\mathbf{A}_k$ 定义为

$$\boldsymbol{\chi}_k = m^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{X}_{1,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{X}_{2,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-, \cdots, \mathbf{X}_{m,k} - \hat{\mathbf{x}}_k^-] \quad (47)$$

$$\mathbf{A}_k = m^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{Z}_{1,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-, \mathbf{Z}_{2,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-, \cdots, \mathbf{Z}_{m,k} - \hat{\mathbf{y}}_k^-] \quad (48)$$

4) 计算增益以及 k 时刻的状态和方差的平方根估计

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{xy,k} / \mathbf{S}_{yy,j}^T) / \mathbf{S}_{zz,k} \quad (49)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (50)$$

$$\mathbf{S}_k = \text{Tri}a([\boldsymbol{\chi}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k, \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{R,k}]) \quad (51)$$

式中：符号 “/” 为矩阵的右除运算符。

5. 迭代容积卡尔曼滤波算法

定义代价函数

$$C(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T (\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-))^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (52)$$

基于 Gauss-Newton 迭代算法, 可导出求解 $C(\mathbf{x}_k)$ 极小点的迭代公式

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i+1)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{(i)T} [\mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{(i)T} + \mathbf{R}_k]^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}) - \mathbf{H}_k^{(i)} (\hat{\mathbf{x}}_k^- - \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})] \quad (53)$$

其中, $\mathbf{H}_k^{(i)} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}}$ 。 $(\mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{(i)\top} + \mathbf{R}_k)^{-1}$ 和 $\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{(i)\top}$ 是量测方程线性化后获得的近似方差和协方差, 即

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{yy}^{(i)} &= \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{(i)\top} + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{P}_{xy}^{(i)} &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^{(i)\top} \\ \mathbf{H}_k^{(i)} &= (\mathbf{P}_{xy}^{(i)})^\top (\mathbf{P}_k^-)^{-1}\end{aligned}\quad (54)$$

(53) 式的迭代计算使用线性化误差传递。对于高度非线性的测量方程, 仅传递线性化误差, 会增大估计误差, 而使用统计线性化误差传递, 可提高状态估计的精度。

结合迭代计算、统计线性化误差传递和容积卡尔曼滤波算法, 可建立下述迭代容积卡尔曼滤波算法 (ICKF)。

5.1 时间更新

该过程与前面一样，假设获得了预测估计和预测方差为 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 和 $\mathbf{P}_k^-$ 。

5.2 量测更新

量测更新是以 $(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{P}_k^-)$ 为初始值的迭代过程。记第 i 次迭代的估计值和方差为 $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$ 和 $\mathbf{P}_k^{(i)}$ 。

$$\mathbf{S}_k^{(i)} = \text{chol}(\mathbf{P}_k^{(i)})$$

$$\mathbf{X}_{j,k}^{(i)} = \hat{\mathbf{S}}_k^{(i)} \xi_j + \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$$

$$\mathbf{Z}_{j,k}^{(i)} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{j,k}^{(i)})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{Z}_{j,k}^{(i)} \quad (55)$$

$$\mathbf{P}_{yy,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{Z}_{j,k}^{(i)} (\mathbf{Z}_{j,k}^{(i)})^T - \hat{\mathbf{y}}_k^{(i)} (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)})^T + \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{P}_{xy,k}^{(i)} = \sum_{j=1}^m \omega_j \mathbf{X}_{j,k}^{(i)} (\mathbf{Z}_{j,k}^{(i)})^T - \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} (\hat{\mathbf{y}}_k^{(i)})^T$$

$$\mathbf{K}_k^{(i)} = \mathbf{P}_{xy,k}^{(i)} (\mathbf{P}_{yy,k}^{(i)})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i+1)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k^{(i)} [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-) - (\mathbf{P}_{xy,k}^{(i)})^T (\mathbf{P}_k^-)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k^- - \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})] \quad (56)$$

$$\mathbf{P}_k^{(i+1)} = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k^{(i)} (\mathbf{P}_{yy,k}^{(i)}) (\mathbf{K}_k^{(i)})^T \quad (57)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, N_{\max})$$

5.3 迭代终止条件

$$\left\| \mathbf{x}_k^{(i+1)} - \mathbf{x}_k^{(i)} \right\| \leq \varepsilon \quad \text{或} \quad i = N_{\max} \quad (58)$$

式中 ε 和 $N_{\max}$ 为预先设置的阈值和最大迭代次数。

若迭代终止时迭代次数为 N , k 时刻的状态估计和协方差为

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{(N)}, \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^{(N)} \quad (59)$$

6. 递推后验克拉美罗下限

状态的最小方差无偏估计量有一个下限，常用的是克拉美罗下限 (Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)，CRLB 比较容易确定且非常有效。

6.1 后验克拉美罗下限

记 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r]^T$ 为一个 r 维的随机待估参数, $\mathbf{y}$ 代表一组观测数据, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 为基于观测数据 $\mathbf{y}$ 的参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的无偏估计。克拉美罗下限定义为 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{J}$ 的逆:

$$\mathbf{P} = E\{[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}][\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}]^T\} \geq \mathbf{J}^{-1} \quad (60)$$

式中, Fisher 信息矩阵 $\mathbf{J}$ 的维数为 $r \times r$ 。

若 $\boldsymbol{\theta}$ 还是随机的, 则后验克拉美罗下限 (Posterior CRLB, PCRLB) 为

$$\mathbf{J}_{i,j} = E\left[-\frac{\partial^2 \log p_{y,\theta}(Y, \Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right], \quad i, j = 1, \dots, r \quad (61)$$

式中, $p_{y,\theta}(Y, \Theta)$ 为 $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ 的联合概率分布。

引入一阶和二阶算子 ∇ 和 Δ :

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_r} \right]^T$$

$$\Delta_{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{\theta}} = \nabla_{\boldsymbol{\psi}} \nabla_{\boldsymbol{\theta}}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \psi_1 \partial \theta_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \psi_r \partial \theta_1} & \frac{\partial^2}{\partial \psi_r \partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \psi_r \partial \theta_r} \end{bmatrix}$$

那么 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{J}$ 可表示为

$$\mathbf{J} = E[-\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \log p_{y,\theta}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\Theta})] \quad (62)$$

若将 $\boldsymbol{\theta}$ 分为两个部分 $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_\alpha^T \boldsymbol{\theta}_\beta^T]^T$, 信息矩阵 $\mathbf{J}$ 相应地写为 $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\alpha\alpha} & \mathbf{J}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{J}_{\beta\alpha} & \mathbf{J}_{\beta\beta} \end{bmatrix}$, 那么

$$\mathbf{P}_\beta = \mathbf{E}\{[\mathbf{g}_\beta(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}_\beta][\mathbf{g}_\beta(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}_\beta]^T\} \geq [\mathbf{J}_{\beta\beta} - \mathbf{J}_{\beta\alpha}\mathbf{J}_{\alpha\beta}^{-1}\mathbf{J}_{\alpha\beta}]^{-1} \quad (63)$$

若 $\mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1}$ 存在, 则矩阵 $\mathbf{J}_{\beta\beta} - \mathbf{J}_{\beta\alpha}\mathbf{J}_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{J}_{\alpha\beta}$ 称为参数 $\boldsymbol{\theta}_\beta$ 的信息矩阵。

6.2 递推后验克拉美罗下限

令 k 时刻所有状态为 $\mathbf{X}_k = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$, 所有测量为 $\mathbf{Y}_k = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$, 记 $J(\mathbf{X}_k)$ 为状态 $\mathbf{X}_k$ 的信息矩阵, $\mathbf{J}_k$ 为状态 $\mathbf{x}_k$ 的信息矩阵, 则其结合状态过程为马尔科夫过程。联合概率密度函数 $p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$ 满足如下等式:

$$p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{x}_0) \prod_{i=1}^k p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i) \prod_{j=1}^k p(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_{j-1}) \quad (64)$$

将 $\mathbf{X}_k$ 写成 $\mathbf{X}_k = [\mathbf{X}_{k-1}^T \mathbf{x}_k^T]^T$, 则 $\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)$ 为

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \mathbf{B}_k^T & \mathbf{C}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}}^{\mathbf{X}_{k-1}} \log p_k\} & E\{\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}}^{\mathbf{x}_k} \log p_k\} \\ E\{\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{X}_{k-1}} \log p_k\} & E\{\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_k} \log p_k\} \end{bmatrix} \quad (65)$$

式中 $p_k = p(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$ 。根据 (63) 式, 可知

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{C}_k - \mathbf{B}_k^T \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k \quad (66)$$

$\mathbf{X}_{k+1}$ 的信息矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{X}_{k+1})$ 为

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_{k+1}) = \begin{bmatrix} E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{X}_k} \log p_{k+1}\} & E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p_{k+1}\} \\ E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{X}_k} \log p_{k+1}\} & E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p_{k+1}\} \end{bmatrix} \quad (67)$$

式中 p_{k+1} 为 $\mathbf{X}_{k+1}$ 和 $\mathbf{Y}_{k+1}$ 的联合概率密度函数。

因此可得

$$-\log p_{k+1} = -\log p_k - \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) - \log p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) \quad (68)$$

把上式带入 (67) 式可得

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_{k+1}) = \begin{bmatrix} E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{X}_k} \log p_{k+1}\} & E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \\ E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{X}_k} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} & E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{X}_k) + E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \end{bmatrix} \quad (69)$$

式中,

$$E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{X}_k} \log p_{n+1}\} = \begin{bmatrix} E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}}^{\mathbf{X}_k} \log p_k\} & E\{-\Delta_{\mathbf{X}_{k-1}}^{\mathbf{x}_k} \log p_k\} \\ E\{-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{X}_{k-1}} \log p_k\} & E\{-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_k} \log p_k\} + E\{-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_k} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$E\{-\Delta_{\mathbf{X}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ E\{-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{X}_k} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_k} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \end{bmatrix} \quad (72)$$

记

$$\mathbf{D}_k^{11} = E\{-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_k} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \quad (73)$$

$$\mathbf{D}_k^{12} = E\{-\Delta_{\mathbf{x}_k}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} \quad (74)$$

$$\mathbf{D}_k^{21} = E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_k} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} = [\mathbf{D}_k^{12}]^T \quad (75)$$

$$\mathbf{D}_k^{22} = E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{x}_{k+1}} \log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k)\} + E\{-\Delta_{\mathbf{x}_{k+1}}^{\mathbf{z}_{k+1}} \log p(\mathbf{z}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1})\} \quad (76)$$

由此可得

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_{k+1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k^T & \mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k^{11} & \mathbf{D}_k^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_k^{21} & \mathbf{D}_k^{22} \end{bmatrix} \quad (77)$$

根据 (63) 式, 可推出 $\mathbf{x}_{k+1}$ 的信息子矩阵 $\mathbf{J}_{k+1}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{k+1} &= \mathbf{D}_k^{22} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_k^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \mathbf{B}_k^T & \mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k^{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_k^{12} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_k^{22} - \mathbf{D}_k^{21} [\mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k^{11} - \mathbf{B}_k^T \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k]^{-1} \mathbf{D}_k^{12}\end{aligned}$$

结合 (66) 式, 可得到下面的递推公式:

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{D}_k^{22} - \mathbf{D}_k^{21} [\mathbf{D}_k^{11} + \mathbf{J}_k]^{-1} \mathbf{D}_k^{12} \quad (78)$$

若考虑加性高斯噪声的状态方程和量测方程, 可知

$$-\log p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k) = c_1 + \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)]^T \mathbf{Q}_k^{-1} [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)] \quad (79)$$

$$-\log p(\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) = c_2 + \frac{1}{2} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})]^T \mathbf{R}_{k+1}^{-1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})] \quad (80)$$

式中: c_1, c_2 为常数。

由此可得 $\mathbf{D}_k^{11}$, $\mathbf{D}_k^{12}$, $\mathbf{D}_k^{21}$ 和 $\mathbf{D}_k^{22}$ 的表达式如下:

$$\mathbf{D}_k^{11} = E\{[\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_k)] \mathbf{Q}_k^{-1} [\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_k)]^T\} \quad (81)$$

$$\mathbf{D}_k^{12} = -E\{\nabla_{\mathbf{x}_k} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_k)\} \mathbf{Q}_k^{-1} \quad (82)$$

$$\mathbf{D}_k^{21} = \mathbf{D}_k^{12} \quad (83)$$

$$\mathbf{D}_k^{22} = \mathbf{Q}_{k+1}^{-1} + E\{[\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_{k+1})] \mathbf{R}_{k+1}^{-1} [\nabla_{\mathbf{x}_{k+1}} \mathbf{h}^T(\mathbf{x}_{k+1})]^T\} \quad (84)$$

递推公式 (78) 的初始信息矩阵 $\mathbf{J}_0$ 定义为

$$\mathbf{J}_0 = E\{-\Delta_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_0} \log p(\mathbf{x}_0)\} \quad (85)$$

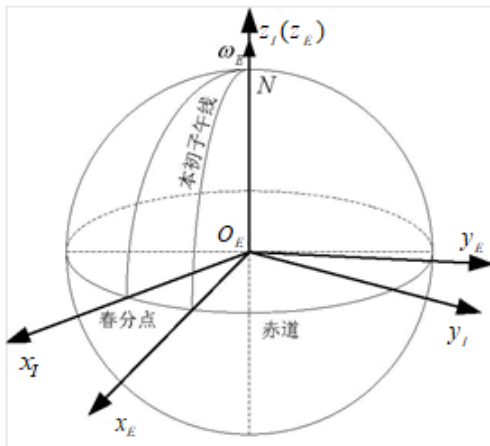


Figure 1: 地心惯性坐标系和地心（固连）坐标系

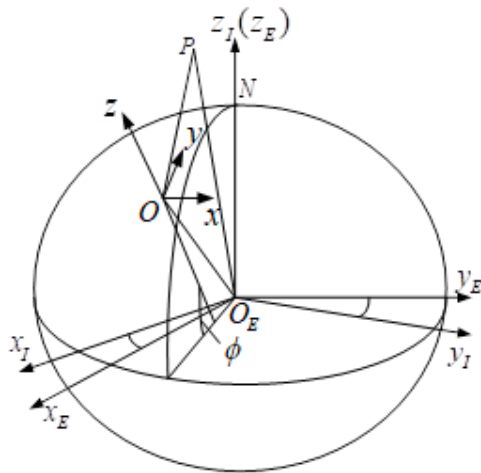


Figure 2: 东北天坐标系坐标系与地心坐标系之间的关系

7. 再入弹道目标状态估计仿真

7.1 坐标系与动力学方程

在雷达站东北天 (ENU) 坐标系下, 再入飞行器动力学方程为

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2\beta}\rho(r - R_e)V\dot{x} - \frac{\mu x}{r^3} \quad (86)$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{2\beta}\rho(r - R_e)V\dot{y} - \frac{\mu y}{r^3} \quad (87)$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{2\beta}\rho(r - R_e)V\dot{z} - \frac{\mu(z + R_e)}{r^3} \quad (88)$$

式中: $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$, $h = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + R_e)^2} - R_e$ 。 R_e 为地球半径, $\beta = \frac{m}{C_d S}$ (kg/m^2) 为弹道系数, μ 为地球引力常数, $\rho(h)$ 为大气密度。

7.2 状态方程与量测方程

假设地球为不自转的均匀圆球, 只考虑地球引力和空气阻力作用, 弹道系数是个未知量, 作为一个待估计状态。以雷达天线为原点建立东北天坐标系, 再入目标运动的状态方程可表示为

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G} \psi(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (89)$$

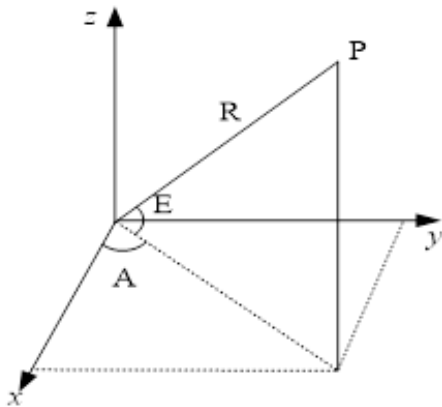


Figure 3: 再入飞行器在 ENU 坐标系的测量量

其中, $\mathbf{x}_k = [x_k \dot{x}_k y_k \dot{y}_k z_k \dot{z}_k \beta_k]^T$ 为再入目标状态。式中

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$\psi(\mathbf{x}_{k-1}) = \begin{bmatrix} -\frac{\rho(h_{k-1})}{2\beta_{k-1}} V_{k-1} \dot{x}_{k-1} - \frac{\mu x_{k-1}}{r_{k-1}^3} \\ -\frac{\rho(h_{k-1})}{2\beta_{k-1}} V_{k-1} \dot{y}_{k-1} - \frac{\mu y_{k-1}}{r_{k-1}^3} \\ -\frac{\rho(h_{k-1})}{2\beta_{k-1}} V_{k-1} \dot{z}_{k-1} - \frac{\mu(z_{k-1} + R_e)}{r_{k-1}^3} \end{bmatrix} \quad (91)$$

式中

$$r_{k-1} = \sqrt{x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2 + (z_{k-1} + R_e)^2} \quad (92)$$

$$V_{k-1} = \sqrt{\dot{x}_{k-1}^2 + \dot{y}_{k-1}^2 + \dot{z}_{k-1}^2} \quad (93)$$

β 是弹道系数 (kg/m^2), μ 为地球引力常数, R_e 为地球平均半径。 $\rho(h)$ 为大气密度, 在高度小于 86 千米以下可近似建模为随高度 h 的下降呈指数衰减, 即 $\rho(h) = c_1 e^{-c_2 h}$, c_1, c_2 为与高度有关的常数。

假设过程噪声 w_k 是均值为零的白噪声，协方差矩阵 Q_k 近似为

$$Q_k = \begin{bmatrix} q_1 \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 T \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$$

式中 T 为连续两个量测间隔时间， q_1, q_2 为位置速度和弹道系数相关的噪声强度。

根据几何关系，可建立测量方程

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (94)$$

式中, $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = [R_k, E_k, A_k]^T$, 且

$$R_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + v_R$$

$$E_k = \arctan \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} + v_E$$

$$A_k = \arctan \frac{y_k}{x_k} + v_A$$

假设量测噪声 $\mathbf{v}_k = [v_R, v_E, v_A]^T$ 是均值为零的白噪声, 协方差矩阵为 $\mathbf{R}_k = \text{diag}[\sigma_R^2, \sigma_E^2, \sigma_A^2]$, $\sigma_R, \sigma_E, \sigma_A$ 分别为距离、俯仰角和方位角的量测误差标准差。

7.3 状态估计性能指标

状态估计常用的性能指标有均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE)、累加均方根误差 (Accumulate Root Mean Square Error, ARMSE) 和平均误差 (Average Error, AE)。

对于弹道式再入目标, 设进行了 N 次 Monte Carlo 仿真实验, 每次仿真实验共跟踪滤波了 M 步。第 i 次 Monte Carlo 仿真时, k 时刻弹道再入目标的真实状态向量记为:

$$\boldsymbol{x}_k^{(i)} = \left[x_k^{(i)} \quad \dot{x}_k^{(i)} \quad y_k^{(i)} \quad \dot{y}_k^{(i)} \quad z_k^{(i)} \quad \dot{z}_k^{(i)} \quad \beta_k^{(i)} \right]^T \quad (95)$$

估计状态向量记为

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \left[\hat{x}_k^{(i)} \quad \hat{\dot{x}}_k^{(i)} \quad \hat{y}_k^{(i)} \quad \hat{\dot{y}}_k^{(i)} \quad \hat{z}_k^{(i)} \quad \hat{\dot{z}}_k^{(i)} \quad \hat{\beta}_k^{(i)} \right]^T \quad (96)$$

7.3.1 均方根误差

(a) 位置 RMSE

$$RMSE_p(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_k^{(i)} - \hat{x}_k^{(i)})^2 + (y_k^{(i)} - \hat{y}_k^{(i)})^2 + (z_k^{(i)} - \hat{z}_k^{(i)})^2]} \quad (97)$$

(b) 速度 RMSE

$$RMSE_v(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(\dot{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^{(i)})^2 + (\dot{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k^{(i)})^2 + (\dot{z}_k^{(i)} - \hat{z}_k^{(i)})^2]} \quad (98)$$

(c) 弹道系数的 RMSE

$$RMSE_\beta(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\beta_k^{(i)} - \hat{\beta}_k^{(i)})^2} \quad (99)$$

7.3.2 累加均方根误差

记第 i 次 Monte Carlo 实验, k 时刻的状态估计误差为:

$$\Delta \mathbf{x}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta x_k^{(i)} & \Delta \dot{x}_k^{(i)} & \Delta y_k^{(i)} & \Delta \dot{y}_k^{(i)} & \Delta z_k^{(i)} & \Delta \dot{z}_k^{(i)} & \Delta \alpha_k^{(i)} \end{bmatrix}^T \quad (100)$$

(a) 位置的 ARMSR

$$ARMSE_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\left[\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [(\Delta x_k^{(i)})^2 + (\Delta y_k^{(i)})^2 + (\Delta z_k^{(i)})^2] \right]} \quad (101)$$

(b) 速度的 ARMSE

$$ARMSE_v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\left[\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [(\Delta \dot{x}_k^{(i)})^2 + (\Delta \dot{y}_k^{(i)})^2 + (\Delta \dot{z}_k^{(i)})^2] \right]} \quad (102)$$

(c) 弹道系数的 ARMSE

$$ARMSE_\beta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\left[\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\Delta \beta_k^{(i)})^2 \right]} \quad (103)$$

7.3.3 平均误差

(a) 位置 AE

$$AE_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(\Delta x_k^{(i)})^2 + (\Delta y_k^{(i)})^2 + (\Delta z_k^{(i)})^2} \quad (104)$$

(b) 速度 AE

$$AE_v(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(\Delta \dot{x}_k^{(i)})^2 + (\Delta \dot{y}_k^{(i)})^2 + (\Delta \dot{z}_k^{(i)})^2} \quad (105)$$

(c) 弹道系数 AE

$$AE_\beta(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \Delta \beta_k^{(i)} \right| \quad (106)$$

7.4 仿真实验

设雷达量测间隔 $T = 0.1s$ ，跟踪目标 $60s$ 。雷达量测的距离、俯仰角和方位角误差的标准差分别为 $\sigma_R = 200m$ 、 $\sigma_E = 0.17rad$ 和 $\sigma_A = 0.17rad$ 。目标初始位置为 $(232000, 232000, 80000)$ (单位: m)，初始速度为 $2290m/s$ ，俯仰角为 210° ，方位角为 45° ，目标弹道系数真实值为 $\beta = 4000kg/m^2$ ，初始状态方差 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([100^2, 200^2, 100^2, 200^2, 100^2, 200^2, 500^2])$ 。

运行 100 次蒙特卡罗仿真，将 ICKF 滤波方法分别与 UKF、CKF 滤波算法的位置误差、速度误差和弹道系数误差相比较，如图4，图5和图6所示。

三种滤波算法的平均位置、速度和弹道系数累加均方误差和平均计算时间如表1所示。

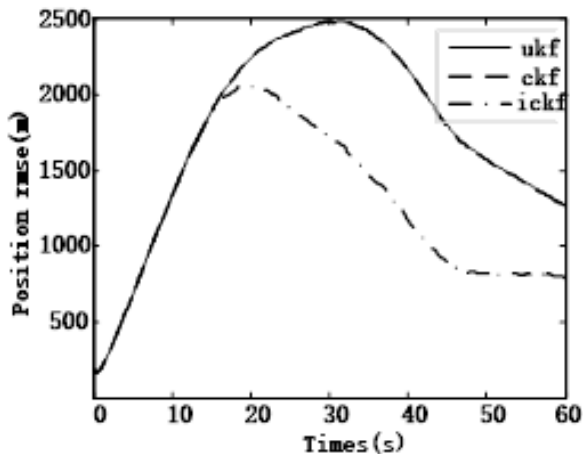


Figure 4: 位置均方根误差

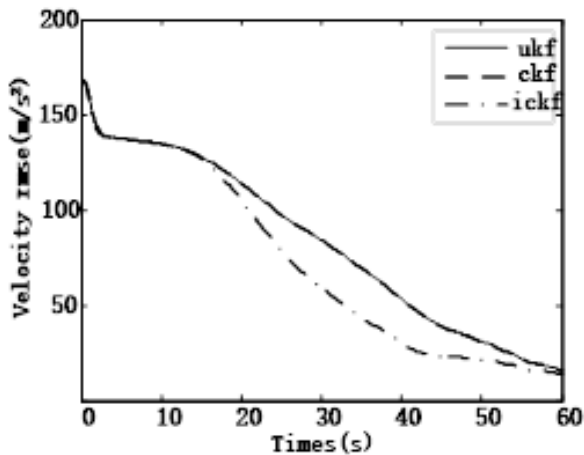


Figure 5: 速度均方根误差

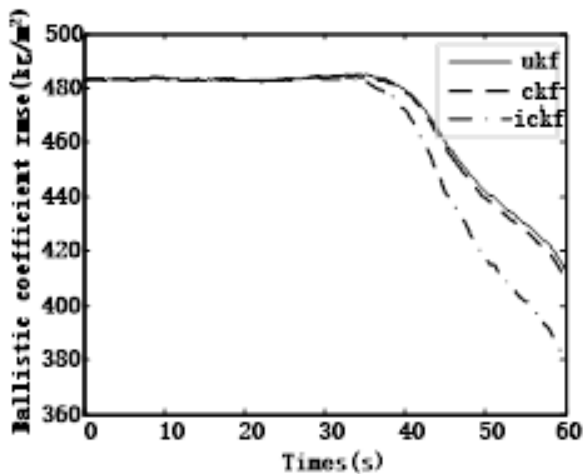


Figure 6: 弹道系数均方根误差

Table 1: 三种滤波器的平均累加均方误差及平均计算时间比较

滤波算法	E_p (m)	E_v (m/s)	E_β (kg/m ²)	t (s)
UKF	1698.57	86.20	397.95	1.02
CKF	1696.58	86.16	397.84	0.30
ICKF	1293.36	79.93	390.70	0.42

从图4、图5可知，ICKF 充分使用了最新的量测信息，位置误差和速度误差较小，状态的估计精度明显高于 UKF 和 CKF。从图6 可知，在估计的前半部分，由于缺乏估计弹道系数的最新信息，估计误差变化不大，而在后半部分，ICKF 使用最新量测信息，大大地降低了弹道系数估计误差。从表 1 可知，UKF 累加均方误差较大，CKF 较小，ICKF 最小，ICKF 平均计算时间远远低于 UKF 的运行时间，稍高于 CKF 的运行时间。上述结果表明 ICKF 算法是一个有效的状态估计方法。

8. 小结

在讨论贝叶斯递推滤波框架基础上，本讲介绍了容积卡尔曼滤波、平方根容积卡尔曼滤波和一种迭代容积卡尔曼滤波算法等算法的基本原理。

其中，迭代容积卡尔曼滤波算法 ICKF 使用球形-径向数值积分方法直接计算经非线性变换的随机变量的均值和方差，实现简单。且使用 Gauss-Newton 迭代和统计线性化误差传播方法充分利用量测信息，降低量测方程非线性对滤波精度的影响。

最后还针对弹道系数未知的再入弹道目标状态估计问题，进行了若干仿真计算，结果表明 ICKF 滤波性能明显优于 UKF 和 CKF。

其他相关内容还包括容积粒子滤波算法、基于 Levenberg-Marquardt 方法的容积卡尔曼滤波等，限于时间不再专门介绍。

8. 一些参考文献

- [1] Gelb,A. A. Applied Optimal Estimation. Ma: M.I.T. Press, 1974.
- [2] Bar-Shalom,Y.Li,X-R.. Estimation and tracking: principles, Techniques and Software . Ma: Artech House, 1993.
- [3] Julier S J,Uhlmann J K,Durrant-Whyten H F. A new approach for filtering nonlinear system. Proc. of the American Control Conf., Washington ,1995:1628-1632.

- [4] Arulampalam S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2):174-188.
- [5] Arasaratnam I, Haykin S, Elliott R J. Discrete-time nonlinear filtering algorithms using Gauss-Hermite quadrature. Proc of the IEEE, 2007, 95(5):953-977.
- [6] Arasaratnam I and Haykin Simon. Cubature Kalman Filters. IEEE Trans on automatic control. Vol.54.No.6, JUNE 2009.1254:1269.
- [7] Gabe Sibley, Gaurav, Sukhatme, Larry Matthies. The Iterated Sigma point Kalman Filter with Application to Long Range Stereo. In Proceedings of

Robotics: Science and Systems, Philadelphia, PA, Aug.2006.

- [8] Li.X.R, Jilkov V.P. A survey of maneuvering target tracking:Part : ballistic target models . Proc 2001 SPIE Conf on Signal and Data Processing of Small Targets. : The International Society for Optical Engineering, 2001:559-581.
- [9] A.Frina. B.Ristic. D.Benvenuti. Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters. IEEE Trans. on aerospace and electronic systems. Vol.38.No.3, pp.854-867.2002.

Questions?