随机系统的滤波与控制导论

蔡远利　教授
西安交通大学自动化学院

0. Outline

1. 从确定性系统到随机系统

1.1 确定性系统

♠ 定义

确定性系统是指系统的状态和行为在给定输入和初始条件下是确定的，即系统的状态和输出只依赖于当前输入和系统的初始状态。

♠ 特点

☞ <u>**理论体系：**</u> 已形成一套完整的技术体系，源自信号与系统、自动控制原理、线性系统理论等经典课程，涵盖系统建模、分析、控制器设计与综合等方面。

- ☞ <u>**应用流程：**</u> 针对物理系统（如运动系统、流程工业系统及社会、经济等动态系统），首先根据牛顿定律、质量守恒等基本规律建立数学模型，再应用控制理论工具研究系统结构、响应，并设计补偿器或控制器以实现期望动态特性。
- ☞ <u>**行为识别：**</u> 对系统施加的输入作用及测量获得的输出信号是系统行为唯一可直接识别的信息；在反馈控制中，测量输出是控制器的直接输入，通常通过与期望输出的偏差构成反馈信号。

1.2 确定性系统理论的局限

♠ 数学模型固有的近似性与未建模动态

任何数学模型都是对实际无穷维、非线性复杂系统的有限维、简化近似。为了分析和设计的可行性，工程师必须忽略许多次要因素（未建模动态）。同时，建模所依据的物理定律本身也是近似的，模型中的参数也并非绝对精确。因此，模型本身就从结构到参数都包含了不确定性。

♠ 不可预测和不可建模的外部干扰

系统除了受控的控制输入外，始终受到各种不可控、难以精确建模的外部作用（如环境扰动、制造误差、执行机构偏差等）。这些干扰使得系统的实际行为永远无法与确定性模型的预测完全一致，是不确定性的核心来源之一。

♠ 不完善、不完整的观测（测量）

并非所有系统状态都可测量，传感器本身存在精度限制、动态滞后，且其输出信号必定受到噪声污染。这意味着反馈控制系统所依赖的输入信息（测量值）本身就是不完美和不完整的，引入了信息层面的不确定性。

Table 1: 确定性系统与不确定性系统简单比较

确定性系统	不确定性系统
• 结果可以明确预测	• 结果无法明确预测或知道
• 存在明确的描述规则或规律	• 存在随机性或偶然性，影响结果
• 没有随机性或偶然性	• 规则或规律可能不完全或不一致
• 基于事实进行决策，控制相对容易	• 基于概率或直觉进行决策，控制比较困难

♠ 不确定性系统的理论和方法

- ☞ 模糊系统理论;
- ☞ 灰色系统理论;
- ☞ 证据与可能性理论;
- ☞ 粗糙集理论;
- ☞ 随机系统理论。

其中随机系统理论起源最早、发展比较完善，对于研究和处理不确定性系统表现出了强大的生命力。它根植于概率论和随机过程，是不确定性系统分析、设计和综合最有效的理论。

1.3 随机系统的含义

- 随机系统是一种具有某种不确定性的动态系统;
- 可以简单地认为不确定性包括作用于系统的干扰、传感器误差和其他测量误差，以及部分未知的系统动态;
- 我们将以随机变量和随机过程作为主要工具，基于概率的方式对不确定性进行描述;
- 在随机系统理论中，认为系统从一个状态转移到另外一个状态不是确定的，而是带有一定的随机性，即相同的输入经过系统的转换后会产生不同的结果;
- 随机系统的输出并非完全无规律性，而是隐含地遵循一定的统计规律。

- 随机系统理论在控制器设计、滤波器技术、计算机网络、信号处理及通信工程等领域有着广泛的应用；
- 随机动态系统的相关概念和方法，对于参数估计、状态估计、不确定性系统控制等，都是非常重要的工具。

◇ 从时间域上划分，随机系统可以分为连续时间随机系统和离散时间随机系统；

◇ 随机系统也可以依赖关系分为线性系统和非线性系统。

2. 关于最优估计

2.1 估计的概念及分类

♠ 估计的定义

估计是从可能包含误差或噪声的数据中提取信息的过程。现代估计方法利用已知的系统关系、测量数据、误差模型以及先验知识，通过算法计算出“最优”的估计值。

♠ **主要分类（按被估计量与时间的关系）**

静态估计（参数估计）：被估计量不随时间演变。

动态估计（状态估计）：对动态系统的状态进行推测。

♠ **次要分类（按估计结果的形式）**

点估计：在固定时刻给出一个确定的估计值。

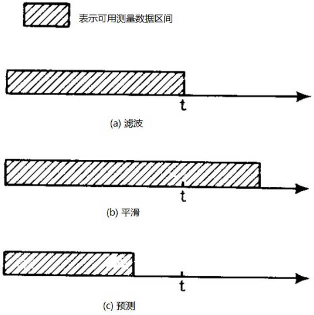
区间估计：给出被估计量的一个置信区间。

♠ 动态状态估计的子类（按估计时间与测量时间的关系）

☞ **滤波：** 估计的时间点与最后一个可用的测量时间点重合。

☞ **平滑：** 估计的时间点落在已有测量数据的时间范围之内。

☞ **预测：** 估计的时间点发生在最后一次可用测量之后。



2.2 卡尔曼滤波器

♠ 核心定义

卡尔曼滤波器是最重要且最常见的**最优估计器**，是一种用于线性系统状态的递归、最优估计算法。它基于系统模型、误差统计模型和初始条件，递归地处理测量数据以估计状态。

♠ 关键属性

☞ **提供误差分析：**能够独立于具体数据输入，生成对系统估计误差的分析。

☞ **具备故障检测能力：**通过比较测量残差与其计算的标准偏差，可以实现不良测量数据的检测与隔离（如导航系统中的传感器故障检测）。

♠ **基础性地位：** 卡尔曼滤波理论是分析和解决广泛估计问题的基本工具，也是实现状态反馈控制的基础（如控制电机、卫星、经济或医疗参数）。

♠ **广泛应用领域：** 最优估计理论在系统控制之外，还广泛应用于图像增强、交通估计、流量预测、轨道估计、参数识别等多个领域。

♠ **在多传感器系统中的核心作用：** 最优估计是处理多传感器输出、获取过程参数最优估计的核心技术，其结果可用于显示或控制。

♠ **在导航中的典型应用：** 自 20 世纪 60 年代中期起，卡尔曼滤波器被广泛应用于多传感器导航系统（如组合惯性导航与 GPS、雷达等），其优势在于：

☞ **最优融合：** 能够最优地融合导航系统信息与包含随机误差的外部测量信息，相比单独使用任一数据源，能显著提高整体精度。

☞ **估计系统误差：** 能够估计出由时变传感器误差引起的、具有相关性的各类系统误差。

☞ **灵活与适应性强：** 作为一种时变滤波器，能适应非平稳误差；易于修改以适应系统配置变化；并能最优地处理任意数量、组合和顺序的外部测量序列。

Table 2: 典型最优估计应用示例

应用领域	动态系统	传感器类型
过程控制	化工车间或工厂	温度 压力 流量 液位 气体分析仪
洪水预报	河流系统	水位 雨量计 气象雷达
目标跟踪	飞行器	雷达 光学成像系统

（航海）导航	舰艇/船只	航海六分仪 计程仪 陀螺仪 加速度计 GPS 或北斗接收机
制导	导弹	导引头 陀螺仪 加速度计 GPS 或北斗接收机
室内定位	机器人	激光雷达 陀螺仪 WIFI 接收机

2.3 历史回顾

♡ 1. **最小二乘法的早期成就（18-19 世纪初）:**

最小二乘法可追溯到 200 多年前，主要贡献者包括罗杰·科茨、托比亚斯·迈耶、伦纳德·欧拉、皮埃尔·拉普拉斯、罗杰·博斯科维奇、丹尼尔·伯努利等，驱动因素是对月球、行星运动及地球尺寸的估计。递归最小二乘法由卡尔·高斯、阿德里安·勒让德和罗伯特·阿德里安在 19 世纪初建立，一般归功于高斯发明确定性最小二乘技术。

♡ 2. **蒂勒的递归算法扩展（1880 年）:**

丹麦天文学家托瓦尔德·尼科莱·蒂勒扩展了最小二乘法，发展出递归算法，并提出估计状态和测量噪声方差的方法，成为自适应滤波的前身。

♡ 3. 费希尔的最大似然估计（约 1910 年）：

费希尔利用概率密度函数引入了最大似然估计方法，对估计理论做出重大贡献。

♡ 4. 维纳滤波与柯尔莫哥洛夫（1940 年代）：

诺伯特·维纳提出基于随机过程的统计最优滤波器（维纳滤波），仅限于统计平稳过程的稳态估计；同期安德雷·柯尔莫哥洛夫处理了离散时间问题。后续工作扩展至非平稳和多变量系统，但计算繁琐。

♡ 5. 卡尔曼滤波器的提出（1960 年前后）：

鲁道夫·埃米尔·卡尔曼等人提出了基于状态空间、时域公式的最优递归滤波技术（卡尔曼滤波器），适合数字计算机实现。彼得·斯威林及前苏联科学家等也独立得到类似结果。

♡ 6. 卡尔曼滤波器命名的原因：

卡尔曼的论文以简单、理论性方式呈现，讨论了状态估计与最优控制的对偶性及滤波器稳定性；数字计算机的发展促进了递推算法实现；卡尔曼向美国航空航天局推荐该技术，被阿波罗登月计划采用，斯坦利·施密特推动了其应用。

♡ 7. 高斯工作与现代方法的联系：

高斯的工作已涉及冗余数据、动态建模、观测误差与概率论基础、估计量性能指标及系统可观测性等概念，卡尔曼滤波器本质上是高斯最小二乘问题的递推解。

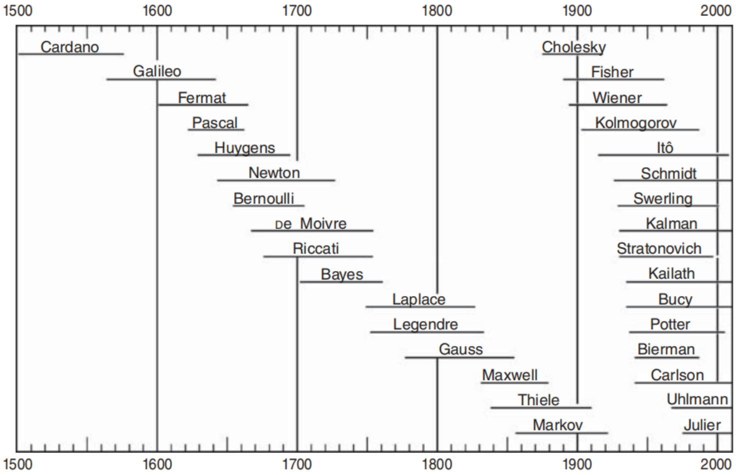


Figure 1: 估计理论重要贡献者活跃期简图

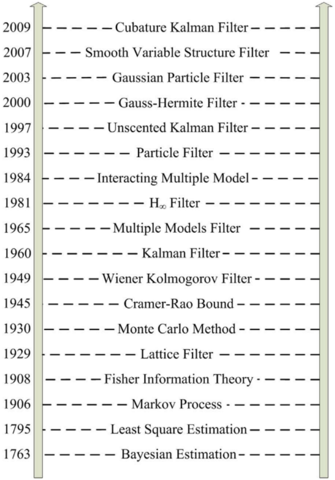


Figure 2: 估计理论发展历史概貌图

2.4 一个简单的估计问题

考虑一个由两个传感器组成的系统，每个传感器对未知常量 x 进行单独的测量 $z_i(i=1,2)$，测量时存在随机、独立、无偏的测量误差 $v_i(i=1,2)$。

测量结果可描述为

$$z_1 = x + v_1 \tag{1}$$

$$z_2 = x + v_2 \tag{2}$$

在没有任何其他信息的情况下，我们可以找出 x 的一个估计值，它是测量值的线性函数，形式为（上标“∧”表示估计值）

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2 \tag{3}$$

式中，k_1 及 k_2 待定。定义估计误差为

$$\tilde{x} = \hat{x} - x$$

我们将 x 的均方值最小作为最优性判据。此外，我们要求 k_1 和 k_2 的选择与 x 的值无关；该条件成立的前提是估值是无偏的，即

$$E[\tilde{x}] = E[k_1(x + v_1) + k_2(x + v_2) - x] = 0 \tag{4}$$

式中 E 表示总体期望或平均值。进行上述期望计算，注意到 $E[v_1] = E[v_2] = 0$ 以及 $E[x] = x$（因为 x 是“非随机的”），可得

$$k_2 = 1 - k_1$$

结合等式 (1) 至 (4)，可计算出均方误差为

$$E[\tilde{x}^2] = k_1^2\sigma_1^2 + (1-k_1)^2\sigma_2^2 \tag{5}$$

其中 σ_1^2 和 σ_2^2 分别表示 v_1 和 v_2 的方差。将该量对 k_1 进行微分，并将结果设置为零，则

$$k_1\sigma_1^2 - (1-k_1)\sigma_2^2 = 0$$

即

$$k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

相应的最小均方估计误差为

$$E[\tilde{x}^2] = (\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2})^{-1} \tag{6}$$

可以看出，均方估计误差小于任一个均方测量误差。估计算法

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} z_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} z_2 \tag{7}$$

在各种感兴趣的极限下都有意义——如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，则取测量值的平均值；如果一个测量值是准确的（σ_1 或 σ_2 等于零），则舍弃另一个测量值；等等。

在这个简单示例中，感兴趣的物理量是一个标量常数，而且只能得到该常数两个线性测量值。一般情况下，我们会遇到下列可能的情况：

1. 被估计的量是向量，并随时间变化；
2. 测量可以在多个不同时刻进行，也可以是向量测量；
3. 被估计的量是动态系统的状态，而动态系统可以是线性或非线性的，也可以是连续时间系统或离散时间系统；
4. 可以是实时数据处理（滤波和预测），也可以是事后处理（平滑）；
5. 对于动态系统，还可能涉及控制作用的最优设计与综合问题。

我们在后面将针对这些问题或情况，介绍相关的理论和技术。

3. 关于最优控制

3.1 确定性最优控制

确定性最优控制主要涉及动态系统模型、目标函数和控制策略三部分。

3.1.1 动态系统模型

确定性系统通常用微分方程或差分方程来描述其状态随时间的变化，一般采用状态方程形式，例如

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t], \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t)$ 表述系统的状态，$\boldsymbol{u}(t)$ 表述系统的控制输入，$\boldsymbol{g}$ 是描述系统动态的函数（映射），t 是系统演化的时间。

3.1.2 目标函数

在最优控制中，我们通常希望设计一个控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 来最小化或最大化某个性能指标（目标函数、成本函数），通常形式为

$$J = \Phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t]\mathrm{d}t \tag{9}$$

其中，L 是过程成本，Φ 是终端成本。

3.1.3 控制策略

最优控制器通过求解相应的优化问题来获得控制策略，通常涉及变分法、动态规划或最优性原理等。主要方法有庞特里亚金极小值原理 (Pontryagin's Minimum Principle)、贝尔曼动态规划技术以及各种数值优化算法。

3.2 确定性最优控制的不足

☞ 1. 模型依赖性强，鲁棒性差

- 控制策略的优劣完全依赖于数学模型的精确性。
- 当模型存在误差、参数不准确或未能完全刻画系统动态时，控制性能会急剧下降。
- 对模型扰动和不确定性过于敏感，缺乏鲁棒性。

☞ 2. 难以处理随机性与不确定性

- 实际系统和环境常包含随机干扰、噪声和不可预测因素。
- 确定性方法无法有效描述和处理这类随机不确定性，导致其在不确定性环境下的应用效果受限。

☞ 3. 信息要求苛刻

- 通常需要完全、精确的状态信息和全局系统信息才能进行求解与实现。
- 在实际应用中，获取全部状态或全局信息往往成本高昂或不现实，限制了其适用性。

☞ 4. 存在其他理论与工程挑战

- 计算复杂性：对于复杂系统，求解最优控制律（如两点边值问题）计算量巨大。
- 局部最优：对于非线性系统，算法可能收敛至局部最优解，而非全局最优。
- 非线性处理困难：缺乏统一、有效的处理一般非线性最优控制问题的方法。

- 实时性问题：复杂的在线计算可能无法满足高速动态系统的实时控制要求。

3.3 随机最优控制的发展历史

☞ 1. 理论奠基（20 世纪 50 年代）

▫ 在确定性最优控制理论发展的背景下，理查德·贝尔曼于 1957 年提出动态规划，为随机控制理论奠定了重要的方法论基础。

▫ 研究者开始将随机过程引入控制框架，以应对系统中的随机扰动问题。

☞ 2. 基本理论形成（20 世纪 60-70 年代）

▫ 基于动态规划的随机最优控制基本理论逐渐成形。

▫ 马尔可夫决策过程（MDP）成为一种被广泛应用的有效研究框架，用于描述和解决序列决策问题。

☞ 3. 理论发展与扩展（20 世纪 80 年代）

- 滤波理论（如卡尔曼滤波）的引入，为解决状态估计和运动不确定性提供了新工具，增强了控制性能。
- 研究重点扩展到大规模系统，并在网络系统、经济系统等领域开始得到应用与发展。

☞ 4. 算法融合与应用深化（20 世纪 90 年代以来）

- 研究方向拓展至部分可观测等不同信息结构下的控制问题。
- 先进的优化算法（特别是强化学习）与机器学习方法被更广泛地融入，推动了算法进步。
- 在航空航天、机器人、智能交通、金融工程、环境管理等众多领域实现实际应用。

☞ 5. 当前前沿与趋势（2000 年以来，特别是近期）

- 深度学习被探索用于解决高维状态空间下的随机控制问题，以提升性能。

- 研究进一步强调控制策略的鲁棒性和适应性，以应对复杂多变的不确定环境。

- 在飞行器制导等具体领域持续取得应用进展。

4. 课程章节安排

1. 导论
    - 阐述不确定性系统、最优估计与最优控制的基本概念。
    - 讨论确定性控制理论的局限性，并简要回顾相关研究的发展历程。
2. 基础知识总结与回顾
    - 回顾概率论、随机过程、矩阵代数与动态系统理论的基本概念。
    - 介绍小扰动线性化、连续系统仿真、有色噪声仿真等实用技术。
3. 经典估计理论

- 系统介绍最小二乘、线性最小方差、最小方差、极大似然、最大后验等经典估计方法。
- 引申讨论融合估计的基本原理，为理解现代估计理论提供新视角。

4. 卡尔曼滤波与平滑理论
   - 将经典理论归纳为四大引理，并以此为基础，建立离散时间线性系统的最优状态估计与平滑算法。
   - 详细推导并多角度阐述卡尔曼滤波算法，作为现代估计理论的核心内容。
5. 卡尔曼滤波的鲁棒性与拓展
   - 针对标准卡尔曼滤波的实际应用问题，以提高鲁棒性为主线，介绍一系列拓展方法。

- 包括衰减/限定记忆滤波、平方根滤波、自适应滤波（含多模型自适应 IMM 滤波）、常值增益次优滤波及鲁棒 H∞ 滤波。

6. 非线性系统滤波方法
   - 基于非线性贝叶斯滤波理论，介绍经典方法（如 EKF、IEKF）和新兴方法（如 UKF、CKF、PF）。
   - 推导递推克拉默-拉奥下界，讨论性能评价指标，并提供高速目标跟踪等仿真实例及部分算法的 MATLAB 代码。
7. 连续时间系统滤波与平滑
   - 介绍连续时间随机系统的离散化技术及连续时间卡尔曼滤波算法。
   - 给出了续时间非线性系统的扩展卡尔曼滤波方法，并简要介绍最优平滑算法与系统的可平滑性。

8. 最小方差控制
   - 介绍经典的随机最优控制方法——最小方差控制。
   - 论线性时不变随机系统的分析、有理谱分解、多项式建模，以及最小方差预测、控制与广义最小方差控制的基本原理。
9. 随机最优控制理论
   - 简要介绍确定性最优控制的基本原理（动态规划、变分法、极大值原理）。
   - 重点介绍随机最优控制中最成熟的线性二次型高斯（LQG）问题，并讨论最优控制的数值求解及非线性随机系统的次优控制方法。
10. 附录 A 泛函分析初步

- 介绍线性空间、内积空间、正交分解及投影定理等泛函分析基础知识，作为深入学习相关主题的重要数学工具。

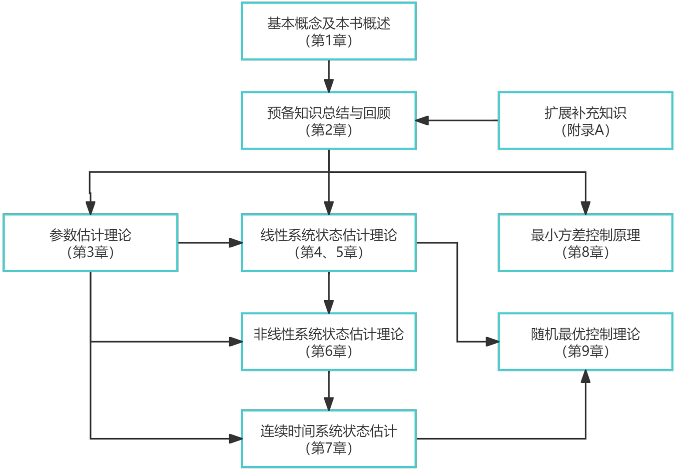


Figure 3: 课程章节结构概图

Questions?