动态系统理论基础

蔡远利　教授
西安交通大学自动化学院

0. Outline

1. 矩阵代数与矩阵微积分

1.1 基本概念

向量 (列向量、行向量)	矩阵 (方阵)	矩阵的秩
零向量	零矩阵	矩阵的转置
单位向量	单位矩阵	维数

Definition 1.1 (线性相关) 对一组向量 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n\}$，如果存在一组不全为零的标量 $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$，使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = 0 \tag{1}$$

那么称向量组 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n\}$ 是线性相关的。否则，称该向量组是线性无关的。线性无关又称为线性独立。

例如，向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 是线性相关的，因为 $2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 0$。而 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 则是线性无关的。行向量 $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, 三者也是线性无关的。

Definition 1.2 (矩阵的秩) 对于任意的矩阵 A，其中线性无关行向量的个数定义为矩阵 A 的秩，记为 $\rho(A)$。

可以证明，矩阵 A 的秩也等于 A 中线性无关列向量的个数。

Theorem 1.1 $n \times m$ 维矩阵 A 的秩总是小于或等于矩阵的行数 n 或列数 m，即

$$\rho(A) \leq \min(n, m) \tag{2}$$

如果 $\rho(A) = \min(n, m)$，那么称 A 是满秩的。

1.2 矩阵代数

Definition 1.3 (内积与正交) 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是具有相同维数的向量，标量 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的内积或点积。假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的维数为 n, 那么

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{3}$$

如果 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$, 称两者是正交的。

Definition 1.4 (向量范数) $\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的 2-范数，记为

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{4}$$

向量的 2-范数也称为欧几里得范数, 另外经常简记为 $\|\boldsymbol{x}\|$。

Definition 1.5 (外积) 向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 与 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ 的外积定义为 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$，这是一个如下形式的矩阵:

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

矩阵之间的除法没有定义，但一个矩阵可以被一个非零标量所除。假设 $c \neq 0$(标量)，$A = [a_{ij}]$，那么 $A/c = [a_{ij}/c]$。

Definition 1.6 (矩阵的迹) 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，它的迹 (*trace*) 定义为矩阵 A 对角元素之和。即

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{6}$$

根据 2-范数的定义，不难发现 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}) = \|\boldsymbol{x}\|_2^2$。对于适当维数的矩阵 A 和 B，有 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$。

Property 1.1 设 λ_i 是矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的第 i 个特征值，那么

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{7}$$

Definition 1.7 (方阵的定性) 设 $A = A^{\mathrm{T}}$, 对任意非零的 $\boldsymbol{x}$, 如果

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} > 0 \tag{8}$$

那么称 A 是正定的，记为 $A > 0$; 如果

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \geq 0 \tag{9}$$

那么称 A 是半正定或非负定的，记为 $A \geq 0$; 如果

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} < 0 \tag{10}$$

那么称 A 是负定的，记为 $A < 0$; 如果

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \leq 0 \tag{11}$$

那么称 A 是半负定或非正定的，记为 $A \leq 0$; 如果 A 既非正定，也非负定，那么称 A 是不定的。

Theorem 1.2 $\lambda(A)$ 表示 A 的所有特征值:

- 如果 $A > 0$, 那么 $\lambda(A) > 0$(正的实数), 而且 A^{-1} 存在且 $A^{-1} > 0$;
- 如果 $A \geq 0$, 那么 $\lambda(A) \geq 0$(非负的实数);
- 如果 $A < 0$, 那么 $\lambda(A) < 0$(负的实数), 而且 A^{-1} 存在且 $A^{-1} < 0$;
- 如果 $A \leq 0$, 那么 $\lambda(A) \leq 0$(非正的实数);
- 如果 A 是不定的, 那么 A 的特征值有的为正、有的为负。

Definition 1.8 (加权 2-范数) *向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 的 Q 加权 2-范数定义为*

$$\|\boldsymbol{x}\|_Q = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{x}} \tag{12}$$

其中，$Q = Q^{\mathrm{T}} > \mathbf{0} (\in \mathbb{R}^{n\times n})$。

Definition 1.9 (矩阵的范数) *矩阵 A 的 2-范数定义为*

$$\|A\|_2 = \max_{\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|_2 \tag{13}$$

【注】

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A) \tag{14}$$

Theorem 1.3 (矩阵求逆引理) 设 A_{11} 和 A_{22} 是可逆方阵，A_{12} 和 A_{21} 是适当维数的矩阵，那么

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{12}A_{11}^{-1} \tag{15}$$

Proof 1.1 设分块表示的矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$，那么

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \tag{16}$$

因此

$$
\begin{aligned}
A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \mathbf{0} \Rightarrow B_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} \\
A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \Rightarrow B_{11} &= A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} \\
\Rightarrow B_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}) \\
\Rightarrow B_{21} &= -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\
\Rightarrow B_{11} &= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

同样地由

$$
\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} B_{11}A_{11} + B_{12}A_{21} & B_{11}A_{12} + B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} & B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}
\tag{18}
$$

可以导出

$$
\begin{aligned}
B_{12} &= -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \\
B_{11} = A_{11}^{-1} - B_{12}A_{21}A_{11}^{-1} &\Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1} + B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\
&\Rightarrow B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}
\end{aligned} \tag{19}
$$

比较式 (17) 和式 (19), 可得

$$
(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \tag{20}
$$

矩阵求逆引理有时也写为如下等价形式:

$$
(A_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} + A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{12}A_{11}^{-1} \tag{21}
$$

矩阵求逆引理有广泛的应用，特别是在矩阵求逆时可以大幅度减小计算量。

设 $A_{11}=I\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{22}=D\in\mathbb{R}^{q\times q}$, $A_{12}=B\in\mathbb{R}^{n\times p}$,$A_{21}=C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, 式（21）化为

$$(I+BD^{-1}C)^{-1}=I-B(D+CB)^{-1}C \tag{22}$$

上式左端需要对 $n\times n$ 维矩阵求逆，右端仅需要对 $p\times p$ 维矩阵求逆。当 $n\gg p$ 时，右端的计算量会降低很多。

Definition 1.10 (矩阵的幂级数) 方阵 A 的幂级数 e^A 定义为

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \tag{23}$$

其中，$A^2 = AA$, $A^3 = AAA = AA^2 = A^2A$, 等。

Theorem 1.4 对于适当维数的矩阵 A、B 和 T，有

$$(1)\quad 若 AB = BA,\quad e^{A+B} = e^A e^B; \tag{24}$$

$$(2)\quad 当 |T| \neq 0,\quad e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}; \tag{25}$$

$$(3)\quad |e^A| = e^{tr(A)}. \tag{26}$$

2. 矩阵微积分

2.1 矩阵微分

2.1.1 基本定义

Definition 2.1 函数矩阵 $A(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times m}$ 的导数定义为各元素独立求导构成的矩阵：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{n\times m} \tag{27}$$

2.1.2 运算法则

1. 加减法：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \pm B) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$
2. 乘法法则：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(AB) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B + A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$
3. 逆矩阵微分：$\mathrm{d}X^{-1} = -X^{-1}\mathrm{d}XX^{-1}$
4. 行列式微分：$\mathrm{d}|X| = |X|\mathrm{tr}(X^{-1}\mathrm{d}X)$

其中，$\mathrm{tr}(X)$ 表示矩阵 X 的迹，同时假设 X 为可逆矩阵。

2.1.3 关于矩阵的偏导数

Definition 2.2 设 $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$f(A)$ 是关于 A 的标量函数，那么

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{1m}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial a_{n1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{nm}}\end{bmatrix} \tag{28}$$

Example 2.1 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{x})$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的标量函数。那么

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{29}$$

上式也称为 $f(\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的梯度。

Example 2.2 对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，由于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$，可见

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{y}\quad\text{（列向量）}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}}=\boldsymbol{x}\quad\text{（列向量）}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\quad\text{（行向量）}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\quad\text{（行向量）}$$

Example 2.3

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{30}$$

如果矩阵 A 是还是对称的，即 $A = A^{\mathrm{T}}$，那么

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2A\boldsymbol{x} \tag{31}$$

不失一般性，设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 那么

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{32}$$

因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & + & \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \\ & \vdots & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j & + & \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i \end{bmatrix}$$

$$= A\boldsymbol{x} + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

Example 2.4 如果 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$，那么

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{33}$$

类似地，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

特别地，设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$，由以上两式可得

$$\frac{\partial A\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = A, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{x}} = A^{\mathrm{T}}. \tag{35}$$

Theorem 2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$，那么

$$\frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial A} = AB^{\mathrm{T}} + AB \tag{36}$$

当 $B = B^{\mathrm{T}}$ 时

$$\frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial A} = 2AB \tag{37}$$

Proof 2.1 用 $A_i \in \mathbb{R}^m$ 表示 A 的第 i 个列向量，即 $A = [A_1, \cdots, A_n]$。因

为

$$
ABA^{\mathrm{T}} = [A_1 \cdots A_n] \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ A_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}
$$

$$
= \left[\sum_{i=1}^{n} A_i b_{i1} \cdots \sum_{i=1}^{n} A_i b_{in} \right] \begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ A_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_i b_{ij} A_j^{\mathrm{T}}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{ij} a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} b_{ij} a_{mj} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{ij} a_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{mi} b_{ij} a_{mj} \end{bmatrix}
$$

所以

$$\mathit{tr}(ABA^{\mathrm{T}}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij}a_{kj} \tag{38}$$

矩阵 A 也可以用对应的行向量来表示，即 $A = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \vdots \\ \bar{A}_m \end{bmatrix}$，其中 $\bar{A}_i$ 表示 A 的第 i 个行向量。类似地，矩阵 B 也可以表示为 $B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \end{bmatrix} = [B_1, \cdots, B_n]$，其中 B_i 表示 B 的第 i 个列向量，$\bar{B}_i$ 表示 B 的第 i 个行向量。

$$\frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial a_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_{1j}a_{1j} + \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} b_{nj}a_{1j} + \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_{1j}a_{mj} + \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} b_{nj}a_{mj} + \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{in} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{A}_1\bar{B}_1^{\mathrm{T}} + \bar{A}_1B_1 & \cdots & \bar{A}_1\bar{B}_n^{\mathrm{T}} + \bar{A}_1B_n \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{A}_m\bar{B}_1^{\mathrm{T}} + \bar{A}_mB_1 & \cdots & \bar{A}_m\bar{B}_n^{\mathrm{T}} + \bar{A}_mB_n \end{bmatrix}$$

所以

$$\frac{\partial tr(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial A} = A[\bar{B}_1^{\mathrm{T}} \cdots \bar{B}_n^{\mathrm{T}}] + A[B_1 \cdots B_n] = AB^{\mathrm{T}} + AB$$

当 $B = B^{\mathrm{T}}$ 时，显然 $AB^{\mathrm{T}} + AB = 2AB$。

Theorem 2.2 假设 A、B 及 C 均是方阵，那么

$$\frac{\partial}{\partial A} tr(A) = I \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial A} tr(BAC) = B^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} \tag{40}$$

$$\frac{\partial}{\partial A} tr(e^{A}) = e^{A^{\mathrm{T}}} \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial A} |BAC| = |BAC| (A^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{42}$$

2.2 矩阵积分

2.2.1 基本定义

Definition 2.3 (矩阵积分) *对于时变矩阵 $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$，其关于时间的积分定义为各元素的独立积分：*

$$\int A(t)\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{1m}(t)\mathrm{d}t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int a_{n1}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int a_{nm}(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix} \tag{43}$$

2.2.2 运算法则

1. 加减法：$\int (A \pm B)\mathrm{d}t = \int A\mathrm{d}t \pm \int B\mathrm{d}t$
2. 微分法则：$\int \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = A$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t A(s)\mathrm{d}s = A(t)$
3. 线性变换：$\int [kA(t) + lB(t)]\mathrm{d}t = k\int A(t)\mathrm{d}t + l\int B(t)\mathrm{d}t$ （k, l 为任意常数）
4. 常数矩阵变换：$\int AB(t)\mathrm{d}t = A\int B(t)\mathrm{d}t$（$A$ 为常数矩阵）

2.3 重要公式速查表

Table 1: 重要公式速查表

运算类型	公式	说明
标量对向量求导	$\frac{\partial(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$	结果与分母同维
向量对向量求导	$\frac{\partial(A\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}} = A$	结果为矩阵，严格记号 $\frac{\partial(A\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}$
矩阵迹导数	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X)$	维数不变
二次型导数	$\frac{\partial(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}} = (A + A^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$	结果与分母同维

3. 线性动态系统

3.1 状态空间方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{44}$$

- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$：状态向量；
- $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$：输入（控制）向量；
- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$：系统矩阵；
- $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$：输入矩阵。

◇ 时不变系统：A、B 为常值矩阵

◇ 时变系统：A、B 随时间变化

3.2 转移矩阵

Theorem 3.1 系统自由运动 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t)$ 的解为：

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) \tag{45}$$

系统转移矩阵 $\Phi(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I \tag{46}$$

基本性质

1. $\Phi(t, t) = I, \quad \forall t;$
2. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t), |\Phi(t, t_0)| \neq 0;$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Phi(t, t_0)| = \mathrm{tr}[A(t)]|\Phi(t, t_0)|;$
4. $|\Phi(t, t_0)| = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}[A(t)]\mathrm{d}t\right]$。

3.3 LTI 系统状态转移矩阵

Theorem 3.2 对线性时不变系统，$A(t) = A$ 不随时间变化，有

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} \tag{47}$$

Theorem 3.3 对时不变系统矩阵 A，有

$$e^{A(t-t_0)} = \mathscr{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \tag{48}$$

其中 $\mathscr{L}^{-1}$ 表示拉普拉斯逆变换。

Proof 3.1 (定理3.2的证明) 将 $\boldsymbol{x}(t)$ 在时刻 t_0 泰勒级数展开

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t_0)+\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)(t-t_0)+\ddot{\boldsymbol{x}}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots$$

根据 $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})=A\boldsymbol{x}(t)$，可知

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)&=A\boldsymbol{x}(t_0)\\ \ddot{\boldsymbol{x}}(t_0)&=A\dot{\boldsymbol{x}}(t_0)=A^2\boldsymbol{x}(t_0)\\ &\vdots\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\boldsymbol{x}(t_0)+A\boldsymbol{x}(t_0)(t-t_0)+A^2\boldsymbol{x}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots\\ &=\left[I+A(t-t_0)+A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\cdots\right]\boldsymbol{x}(t_0)\end{aligned}$$

由矩阵幂级数的定义，可得

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$$

同时说明 $\Phi(t,t_0)=\Phi(t-t_0)$。

Proof 3.2 (定理3.3的证明) 对 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$ 两端取拉普拉斯变换

$$sX(s)-\boldsymbol{x}(t_0)=AX(s)$$

其中，$X(s)$ 表示 $\boldsymbol{x}(t)$ 的拉普拉斯变换，$\boldsymbol{x}(t_0)$ 为状态初值。由此可得

$$X(s)=(sI-A)^{-1}\boldsymbol{x}(t_0)$$

因此

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]\boldsymbol{x}(t_0)$$

结合定理3.2，可导出

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} = \mathscr{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

3.4 系统通解

Theorem 3.4 对于线性时变系统 (44)，状态向量的通解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{49}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t_0)$ 为系统状态初值，$\Phi(t, t_0)$ 为系统状态转移矩阵。

Theorem 3.5 对于线性系统 (44)，如果 A 和 B 是定常矩阵，那么

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{50}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t_0)$ 为系统状态初值，$e^{A(t-t_0)}$ 为此时系统状态转移矩阵。

4. 采样控制系统

连续时间系统离散化

根据系统通解，引入零阶保持器 假设（控制信号在 $[t_k, t_{k+1})$ 保持常值 $\boldsymbol{u}_k$），可得：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F_k \boldsymbol{x}_k + G_k \boldsymbol{u}_k \tag{51}$$

其中，$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}(t_{k+1})$, $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(t_k)$。另外

$$F_k = \Phi(t_{k+1}, t_k), \qquad G_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) B(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{52}$$

近似地（$\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 足够小）

$$F_k \approx [I + A(t_k)]\Delta t, \qquad G_k \approx B(t_k)\Delta t \tag{53}$$

LTI 系统

$$
\begin{aligned}
F_k &= e^{A(t_{k+1}-t_k)} = e^{A\Delta t} \\
G_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}\mathrm{d}\tau B = \int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-\lambda)}\mathrm{d}\lambda B
\end{aligned}
$$

系统矩阵A **非奇异**时，利用

$$
\int_0^{\Delta t} e^{-A\lambda}\mathrm{d}\lambda = \int_0^{\Delta t}(I - A\lambda + \frac{1}{2!}A^2\lambda^2 - \cdots)\mathrm{d}\lambda = [I - e^{-A\Delta t}]A^{-1}
$$

可导出

$$
F_k = F = e^{A\Delta t} \tag{54}
$$

$$
G_k = G = F[I - e^{-A\Delta t}]A^{-1}B \tag{55}
$$

5. 稳定性、可控性与可观性

5.1 稳定性

Definition 5.1 (李雅普诺夫稳定性) 考虑连续时间线性时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{56}$$

对任意有界的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，如果 $\boldsymbol{x}(t)$ $(\forall t > 0)$ 有界，那么称系统 (56) 是李雅普诺夫 (Lyapunov) 稳定的。

Definition 5.2 (渐进稳定) 对任意有界的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，如果

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0} \tag{57}$$

那么称系统 (56) 是渐进稳定的。

Theorem 5.1 线性时不变系统 (56) 渐进稳定的充分必要条件是矩阵 A 的所有特征根均具有负实部，即

$$\mathit{Re}\ \lambda(A) < 0 \tag{58}$$

Definition 5.3 (离散时间线性系统李雅普诺夫稳定性) 对离散时间线性时不变系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F\boldsymbol{x}_k \tag{59}$$

当初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 有界时，如果 $\boldsymbol{x}_k$ $(\forall k > 0)$ 有界，那么称系统 (59) 是李雅普诺夫稳定的。

Definition 5.4 (离散时间线性系统渐进稳定) 对任意有界的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，如果

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \tag{60}$$

那么称系统 (59) 是渐进稳定的。

Theorem 5.2 线性时不变系统 (59) 渐进稳定的充分必要条件是矩阵 F 的所有特征根都在单位圆内，即

$$|\lambda(F)| < 1 \tag{61}$$

5.2 可控性

Definition 5.5 (连续时间系统可控性) 对连续时间系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}$$

如果存在控制 $\boldsymbol{u}(t)$, 使系统从任何初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$, 转移到任何期望的状态 $\boldsymbol{x}(t)$ $(\forall t > 0)$，那么称该系统是可控的。

Definition 5.6 (离散时间系统可控性) 对离散续时间系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = F_k\boldsymbol{x}_k + G_k\boldsymbol{u}_k$$

如果存在控制 $\{\boldsymbol{u}_0, \cdots, \boldsymbol{u}_k\}$, 使系统从任何初始状态 $\boldsymbol{x}_0$, 转移到任何期望的状态，那么称该系统是可控的。

5.3 可观性

对于一个连续时间线性系统的完整描述为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{62}$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ 为系统的输出向量，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ 是系统的输入（控制）向量。$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是系统矩阵，$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是输入矩阵，$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 称系统的输出矩阵。

Definition 5.7 (连续时间系统可观性) *如果由系统输入 $\boldsymbol{u}(\tau)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(\tau)$，$\tau \in [0, t](\forall t > 0)$，可以唯一确定系统的初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$，那么连续时间线性系统 (62) 称为可观的。*

Theorem 5.3 线性时不变系统 (62) 可观的充分必要条件是李雅普诺夫微分方程

$$-\dot{P} = PA + A^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C, \quad P(0) = 0 \tag{63}$$

存在正定解 $P(t)$ $(t > 0)$。

对离散时间系统有类似结论。考虑含输出方程的线性离散时间系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = F_k \boldsymbol{x}_k + G_k \boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{y}_k = H_k \boldsymbol{x}_k \end{cases} \tag{64}$$

其中，$\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量，$\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{R}^m$ 为系统的输出向量,$\boldsymbol{u}_k \in \mathbb{R}^m$ 是系统的输入（控制）向量。$F_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是系统矩阵，$G_k \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是输入矩阵,$H_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 称系统的输出矩阵。

Definition 5.8 (离散时间系统可观性) *如果系统 (64) 的任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 可以由系统的输入 $\boldsymbol{u}_i$ 和输出 $\boldsymbol{y}_i$ 唯一确定,$0 \le i \le k(k > 0)$，那么离散时间线性系统 (64) 称为可观的。*

Theorem 5.4 离散时间线性时不变系统可观的充要条件是如下李雅普诺夫差分方程：

$$P_i = F^{\mathrm{T}} P_{i+1} F + H^{\mathrm{T}} H, \quad P_k = 0 \tag{65}$$

存在正定解 $P_0 > 0(k > 0)$。

5.4 可镇定性与可检测性

Definition 5.9 (可镇定性) 如果一个系统的不可控模态是稳定的，那么称该系统是可镇定的。

Definition 5.10 (可检测性) 如果一个系统是可观的，或者不可观模态是稳定的，那么该系统成为可检测的。

核心关系

- 可镇定性是可控性的弱化概念;
- 可检测性是可观性的弱化概念;
- 可镇定系统可通过状态反馈实现稳定;
- 可检测系统可通过观测器实现状态估计。

6. 小扰动线性化

对一般非线性系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{66}$$

设原点是系统的平衡点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$。

泰勒级数展开

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_0 \boldsymbol{x} + \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right|_0 \boldsymbol{u}$$

由此可得系统**线性化模型**:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{67}$$

其中 (雅可比矩阵):

$$A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_0 = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}},$$
$$B = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right|_0 = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}.$$

Example 6.1 考虑如下非线性系统:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

显然, 系统的平衡点是 $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$。由此, 可以得到线性化模型:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

一般地，如果系统的标称运动为

$$\dot{\boldsymbol{x}}^* = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \tag{68}$$

定义偏差：

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*, \quad \Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*.$$

于是可得如下**线性化模型**：

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = A\Delta\boldsymbol{x} + B\Delta\boldsymbol{u} \tag{69}$$

其中：

$$A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}\right|_* = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}},$$
$$B = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\right|_* = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)}{\partial \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}.$$

输出方程线性化 如果 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 是系统的输出，则

$$\Delta \boldsymbol{y} = C \Delta \boldsymbol{x} \tag{70}$$

其中：$C = \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}$。

■**小扰动线性化应用条件**：非线性映射 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 足够光滑，而且偏差运动足够小。

7. 连续时间系统仿真

7.1 问题描述

对一个连续时间系统，如果给定控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$, 那么可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{71}$$

如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 和 t 连续，而且关于 t 满足 Lipschitz 条件，则上式的解存在且唯一，可以通过有限差分法获得数值解。给定初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, 通过计算机计算 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$, 其中 $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}(t_i)$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$。这就是连续时间系统仿真问题。

7.2 常用方法

1. 欧拉法（1 阶收敛,$O(h^2)$）

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, t_k) \tag{72}$$

2. 梯形法（2 阶收敛,$O(h^3)$）

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2) \tag{73}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, t_k) \\ \boldsymbol{k}_2 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}_1, t_k + h) \end{cases} \tag{74}$$

3. 四阶龙格-库塔法（4 阶收敛,$O(h^5)$）

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4) \tag{75}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_1 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, t_k) \\ \boldsymbol{k}_2 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_1, t_k + \frac{1}{2}h) \\ \boldsymbol{k}_3 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_2, t_k + \frac{1}{2}h) \\ \boldsymbol{k}_4 = h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{k}_3, t_k + h) \end{cases} \tag{76}$$

7.3 仿真算例

1. 质量-弹簧-阻尼系统

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{77}$$

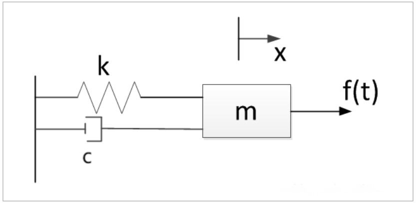

Figure 1: 质量-弹簧-阻尼系统

状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{78}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{f(t)}{m} \tag{79}$$

python 仿真代码:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
#解决绘图中中文显示问题
plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['KaiTi'] # 指定默认字体
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # 解决保存图像负号'-'显示为方块的问题
...
```

Table 2: 质量-弹簧-阻尼系统仿真参数

参数	值	单位	说明
m	1.0	kg	质量
c	0.5	$\mathrm{N \cdot s/m}$	阻尼系数
k	2.0	N/m	弹簧系数
f	1.0	N	作用力
$[x(0), \dot{x}(0)]$	[0.0, 0.0]	m, m/s	初始状态
$[t_0, t_f]$	[0, 10]	s	仿真时间范围
h	0.01	s	仿真时间步长

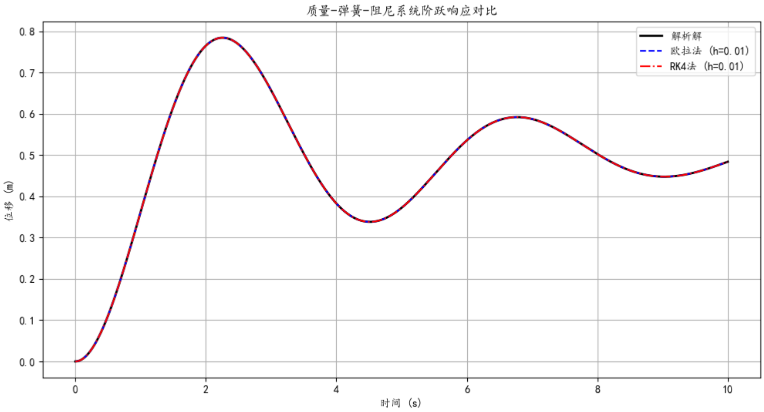

Figure 2: 质量-弹簧-阻尼系统仿真结果

2. 非线性单摆系统

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \tag{80}$$

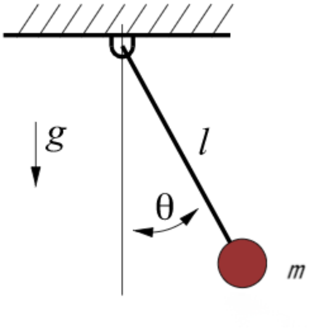

Figure 3: 非线性单摆系统

Table 3: 非线性单摆系统仿真参数

摆长 l	重力加速度 g	阻尼系数 c	质量 m	初始角度	初始角速度	仿真步长
1.0[m]	9.8[m/s^2]	0.1[N · s/m]	1.0[kg]	π/3[rad]	0.0[rad/s]	0.01[s]

状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{81}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \tag{82}$$

仿真结果

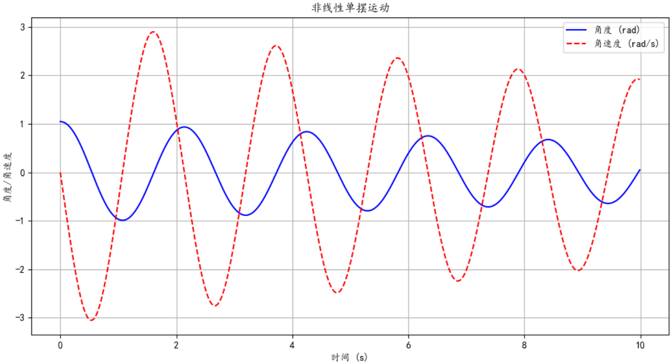

Figure 4: 非线性单摆系统仿真结果（RK4）

Questions?