



泛函分析基础

蔡远利 教授
西安交通大学自动化学院

0. Outline

- 1 线性空间 / 2
- 2 内积空间 / 7
- 3 正交分解与投影定理 / 12

1. 线性空间

Definition 1.1 (域 (实数域 | 复数域)) 对数的集合 K , 如果满足以下条件:

1. 包含零元素、单位元素, 即 $0 \in K$, $1 \in K$;
2. 对四则运算封闭, 即 $\forall a, b \in K$, 有 $a + b \in K$, $a - b \in K$, $ab \in K$, $a/b \in K (b \neq 0)$.

则称 K 为数域。

Definition 1.2 (线性空间) 设 V 是非空集合, $\alpha, \beta, \gamma \in V$, K 是一个数域, $\lambda, \mu \in K$, 建立加法 \oplus 和数乘 \circ 两种运算。

若对于两种运算封闭, 即 $\alpha \oplus \beta \in V$, $\lambda \circ \alpha \in V$. 此外, 关于定义的两
种运算满足以下 8 条运算规律:

1. 加法交换律: $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$

2. 加法结合律: $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$

3. 存在零元素: $\theta \in V, \alpha \oplus \theta = \alpha$

4. 存在负元素: $\alpha \oplus \beta = \theta \Rightarrow \beta = -\alpha, -\alpha \in V$

5. 分配律: $(\lambda + \mu) \circ \alpha = \lambda \circ \alpha \oplus \mu \circ \alpha$

6. 分配律: $\lambda \circ (\alpha \oplus \beta) = \lambda \circ \alpha \oplus \lambda \circ \beta$

7. 结合律: $\lambda \circ (\mu \circ \alpha) = (\lambda\mu) \circ \alpha$

8. 存在单位 1: $1 \circ \alpha = \alpha, 1 \in K$

则称 V 为线性空间 (向量空间), $\alpha, \beta, \gamma \in V$ 称为向量。

Remark 1.1 关于线性空间, 有两点需要注意:

1. 线性空间中的元素不一定是通常意义下的向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 但是统称为向量;
2. 线性空间定义的加法和数与向量的乘法不一定是通常意义下的加法与向量的乘法。

Example 1.1 n 元有序数组构成的向量 $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 的集合, 关于通常意义下的加法与向量的乘法是封闭的; 满足 (1) - (8) 条性质。这个集合构成向量空间, 记为 \mathbb{R}^n 。

Example 1.2 考虑 $V = \{\alpha = (a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ 和实数域 \mathbb{R} , 定义两种运算:

1. $\forall \alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V, \alpha \oplus \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$;
2. $\forall k \in \mathbb{R}, k \circ \alpha = (ka_1, 0)$ 。

显然, 第 8 条要求不满足 $1 \circ \alpha = (a_1, 0) \neq \alpha$ 。所以, 此时的 V 不构成线性空间。

Example 1.3 考虑线性齐次微分方程的所有解

$$V = \{y = f(x) | y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0\}$$

在 V 中定义通常函数的加法与数乘。显然齐次微分方程的解 $y_1 + y_2, ky_1$ 仍然是线性齐次微分方程的解, (1)-(8) 条性质都满足, 所以形成线性空间。

Example 1.4 考虑次数小于等于 n 的实系数多项式集合

$$V = \{p(x) | p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

在 V 中定义通常多项式的加法与数乘。显然, V 构成线性空间, 记为 $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ 。

2. 内积空间

Definition 2.1 (内积与内积空间) 设 H 是数域 K 上的线性空间, 定义函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow K$, 使得: 对 $\forall x, y, z \in H, \alpha \in K$, 满足

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \langle \alpha x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle$ 。

则称 $\langle x, y \rangle$ 为数域 K 中 x 与 y 的内积, 而称定义了内积的空间 H 为内积空间。

Remark 2.1 上划线表示共轭运算。

Definition 2.2 (内积诱导距离与范数)

1. 范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 为由内积诱导的范数。
2. 距离函数 $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ 称为由内积诱导的距离。

Remark 2.2 1. 内积与由内积诱导的范数满足三角不等式关系——施瓦茨不等式 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ 。

2. 由内积诱导的范数满足范数公理，内积空间按照由内积导出的范数是线性赋范空间。但反之不然。

Definition 2.3 (希尔伯特空间 (Hilbert Space)) 设 H 是内积空间, 若 H 按照由内积诱导的范数成为巴拿赫 (Banach) 空间, 则称 H 是希尔伯特空间。

Example 2.1 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 按照内积 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ 是内积空间。 \mathbb{R}^n 按照由内积导出的范数 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ 是 Banach 空间, 因而是 Hilbert 空间。 \mathbb{R}^n 中由内积导出的距离为 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$ 。

Example 2.2 l^2 空间 (平方可和级数全体) 按照内积 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ 是内积空间; l^2 空间按照由此内积导出的范数 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$, 是 Banach 空间, 因而是 Hilbert 空间; l^2 空间中由此内积导出的距离为 $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$ 。

Example 2.3 $L^2[a, b]$ 空间 (平方可积函数全体) 按照内积 $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)\bar{y}(t)dt$ 是内积空间; $L^2[a, b]$ 空间按此内积导出的范数为 $\|x\| = [\int_a^b |x(t)|^2 dt]^{\frac{1}{2}}$, 是 Banach 空间, 因而是 Hilbert 空间。 $L^2[a, b]$ 中由此内积导出的距离为 $\rho(x, y) = \|x - y\| = [\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt]^{\frac{1}{2}}$ 。

Example 2.4 $C[a, b]$ 空间 (连续函数全体) 按照范数 $\|x\|_{\infty} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ 是线性赋范空间, 但 $C[a, b]$ 不是内积空间。

这里对后一个结论进行简单证明。取 $x = 1, y = (t - a)/(b - a) \in C[a, b]$, 因此 $\|x\|_\infty = 1, \|y\|_\infty = 1$, 同时

$$\|x + y\|_\infty = \max |1 + (t - a)/(b - a)| = 2$$

$$\|x - y\|_\infty = \max |1 - (t - a)/(b - a)| = 1$$

注意到 $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 5 \neq 4 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, 说明 $C[a, b]$ 中范数不满足平行四边形公式, 因而不是由内积导出的范数。所以 $C[a, b]$ 不是内积空间。

3. 正交分解与投影定理

在解析几何中，两个向量正交的充分必要条件是它们的内积等于 0。向量 \boldsymbol{x} 在空间中坐标平面上的正交投影向量 \boldsymbol{x}_0 是将向量的起点移到坐标原点，过向量的终点做平面的垂线所得的垂足与原点之间的有向线段而得到的，即 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ ，其中 \boldsymbol{x}_1 垂直于（记为“ \perp ”）该坐标平面。 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ 称为向量 \boldsymbol{x} 关于坐标平面的正交分解。如图1所示。

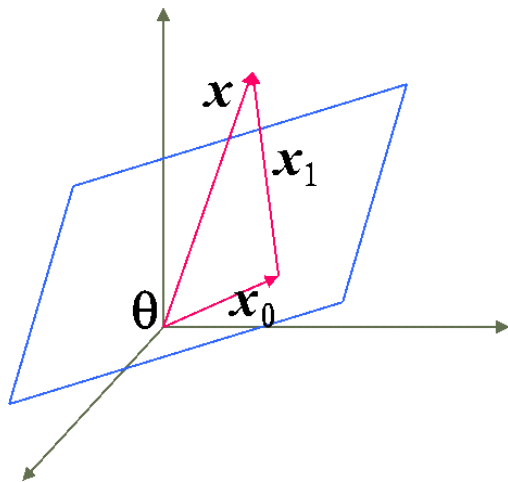


Figure 1: 向量正交投影

可以将把正交分解和正交投影的概念推广到一般的内积空间中。由此获得的投影定理是一个理论和应用上都极其重要的定理，利用投影定理可以将内积空间分解成两个子空间的正交和。这是内积空间特有的性质，投影定理在一般的巴拿赫空间中并不成立（因为巴拿赫空间中并没有正交性的概念）。在实际应用中，投影定理还常被用来判定最佳逼近的存在性和唯一性。

Definition 3.1 (正交) 设 H 是内积空间， $x, y \in H, M, N \subset H$ ，那么

1. $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$;
2. $x \perp M \Leftrightarrow \forall y \in M, \langle x, y \rangle = 0$;
3. $M \perp N \Leftrightarrow \forall x \in M, \forall y \in N, \langle x, y \rangle = 0$ 。

Theorem 3.1 (勾股定理) 设 H 是内积空间, 若 $x, y \in H$, 且 $x \perp y$, 则

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Remark 3.1 1. 一般的内积空间中, 若 $x \perp y$, 则有勾股定理 $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ 成立, 但反之不然。

2. 在实内积空间中, 若 $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ 。

Definition 3.2 (正交补) 设 H 是内积空间, $M \subset H$, 称集合 $M^\perp = \{x | x \perp y, \forall y \in M\}$ 为 M 在 H 中的正交补。

Theorem 3.2 (正交补的性质) 设 H 是内积空间, 则

1. $H^\perp = \mathbf{0}, \mathbf{0}^\perp = H$;
2. $M \subset H, M \cap M^\perp = \mathbf{0}$;
3. $\forall M \subset H, M^\perp$ 是 H 的闭线性子空间, 即 H 的完备子空间。

上述定理中第 (1) 和 (2) 条结论根据定义可以直接得出。考虑第 (3) 条结论, 实现上, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M^\perp, \forall \mathbf{z} \in M$, 有 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0, \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0$, 因此

$$\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

说明 $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in M^\perp$, 即 M^\perp 是 H 的线性子空间。又设 $\forall \mathbf{x}_n \in M^\perp, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}, \forall \mathbf{z} \in M$, 可知 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{z} \rangle = 0$, 所以 $\mathbf{x} \in M^\perp$ 。因此 M^\perp 是 H 的闭线性子空间。

Definition 3.3 (正交分解与正交投影) 设 H 是内积空间, $\forall M \subset H$ 是线性子空间, $x \in H$, 如果存在 $x_0 \in M, x_1 \in M^\perp$, 使得

$$x = x_0 + x_1$$

则称 x_0 为 x 在 M 上的正交投影, 而称上式为 x 关于 M 的正交分解。

Theorem 3.3 (投影定理) 设 M 是希尔伯特空间 H 的闭线性子空间, 则对 $\forall x \in H$, 在 M 中存在唯一的正交投影 x_0 , 使得

$$x = x_0 + x_1$$

其中, $x_1 \in M^\perp$ 。

Questions?