参数估计理论

蔡远利　教授
西安交通大学自动化学院

0. Outline

1. 问题描述

根据随机向量 $\boldsymbol{Z}$ 的一个样本（实现）$\boldsymbol{z}$，推断随机向量 $\boldsymbol{X}$ 最可能的取值（最优估计）$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})$。

Table 1: 符号惯例

符号	含义
$\boldsymbol{x}$	被估计量
$\boldsymbol{z}$	测量（量测）量
$\hat{\boldsymbol{x}}$	被估计量的估计值，是量测量的向量函数
$\tilde{\boldsymbol{x}}$	估计误差，$\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$

2. 贝叶斯估计

Definition 2.1 (代价函数) 若标量函数 $L[x-\hat{x}(z)] = L(\tilde{x})$ 满足：

1) 当 $\|\tilde{x}_2\| \geq \|\tilde{x}_1\|$ 时，有 $L(\tilde{x}_2) \geq L(\tilde{x}_1)$;

2) 当 $\tilde{x} = 0$ 时， $L(\tilde{x}) = 0$;

3) $L(\tilde{x}) = L(-\tilde{x})$。

则称 $L(\tilde{x})$ 为用 $\hat{x}(z)$ 对 x 进行估计时的代价函数 (或称为损失函数)。

Definition 2.2 (贝叶斯风险) 代价函数的数学期望 $B(\tilde{x}) = E[L(\tilde{x})]$，称为估计 $\hat{x}(z)$ 的贝叶斯风险（*Bayes Risk*）。

Definition 2.3 (贝叶斯估计) 若 $\hat{x}(z)$ 是使 $B(\tilde{x}) \Rightarrow \min$ 的估计，那么称 $\hat{x}(z)$ 为 x 的贝叶斯估计。

2.1 最小方差估计 (Minimum Variance Estimation)

Definition 2.4 (最小方差估计) 取 $L(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]$ 的贝叶斯估计，称为最小方差估计，记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z})$。

Theorem 2.1 最小方差估计的结论是条件均值，即

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] \tag{1}$$

Proof 2.1 根据最小方差估计的定义可知

$$\begin{aligned}
B(\tilde{\boldsymbol{x}}) &= E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})] \\
&= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]f_{xz}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\boldsymbol{z})\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{z} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\boldsymbol{z})B_z(\tilde{\boldsymbol{x}})\mathrm{d}\boldsymbol{z}
\end{aligned}$$

由于 $f_z(\boldsymbol{z}) \geq 0$，不难发现

$$B(\tilde{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \min \Leftrightarrow B_z(\tilde{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \min$$

由

$$\frac{\partial B_z(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}} = -2\int_{-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

可知

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]$$

可进一步验证极值的充分条件

$$\frac{\partial^2 B_Z(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial^2 \hat{\boldsymbol{x}}} = 2I > 0$$

Corollary 2.1 最小方差估计的均值及估计误差协方差分别为

(1) $E\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = E\boldsymbol{x}$, 即 $E\tilde{\boldsymbol{x}}_{MV} = 0$

(2) $P_{\tilde{x}_{MV}} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{x|z} f_z(\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = E_z P_{x|z}$

Proof 2.2 根据均值的定义

$$E\overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}} f_z(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f_{x|z}(\boldsymbol{x}) f_z(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z}$$

$$= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f_{xz}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \bar{\boldsymbol{x}}$$

因此 $E\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = E\boldsymbol{x}$，即 $E\tilde{\boldsymbol{x}}_{MV} = 0$。

再由协方差的定义可知

$$P_{\tilde{x}_{MV}} = E\tilde{\boldsymbol{x}}_{MV}\tilde{\boldsymbol{x}}_{MV}^{\mathrm{T}} = E\{(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} \int_{-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}} f_{x|z}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = E_z P_{x|z}$$

Corollary 2.2 若 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 相互独立，则 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}=E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]=E\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}$。

Proof 2.3 根据贝叶斯公式，考虑到 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 相互独立，则有

$$\begin{aligned}
E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}f_{x|z}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}\frac{f_{xz}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{f_z(\boldsymbol{z})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}\frac{f_x(\boldsymbol{x})f_z(\boldsymbol{z})}{f_z(\boldsymbol{z})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}f_x(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 相互独立时 $E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]=E\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}$。

Corollary 2.3 (最小方差估计一般求解公式)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) f_x(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) f_x(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

Proof 2.4 因为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} \frac{f_{xz}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})}{f_z(\boldsymbol{z})} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x} f_{xz}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xz}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

分子、分母分别再一次应用贝叶斯公式 $f_{xz}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) f_x(\boldsymbol{x})$，即得证。

Theorem 2.2 (最优估计的不变性) 假设

1. $L(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 关于 $\tilde{\boldsymbol{x}}=0$ 对称且凹；
2. $B_z(\tilde{\boldsymbol{x}})=\int_{-\infty}^{+\infty} L(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_B)f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 存在；
3. $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$ 关于条件均值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}=E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]$ 对称且凸。

那么，$\hat{\boldsymbol{x}}_B=\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}$。

Theorem 2.3 (随机正交原理) 设 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{z}$ 是两随机向量，那么对任意的函数 $g(\boldsymbol{z})$，有

$$Eg(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}])^{\mathrm{T}}=0 \tag{3}$$

Proof 2.5

$$\begin{aligned}
Eg(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}])^{\mathrm{T}} &= Eg(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}-Eg(\boldsymbol{z})E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]^{\mathrm{T}} \\
&= Eg(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}-\int_{-\infty}^{+\infty} g(\boldsymbol{z})f_z(\boldsymbol{z})\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}f_{x|z}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{z} \\
&= \overline{g(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}-\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z}=0
\end{aligned}$$

Corollary 2.4 (随机投影定理) 设 $g(\cdot)$ 为任一函数，那么

$$E\|\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]\|^2 \le E\|\boldsymbol{x}-g(\boldsymbol{z})\|^2 \tag{4}$$

Proof 2.6 根据范数的定义

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}-g(\boldsymbol{z})\|^2 =& \|\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]+E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]-g(\boldsymbol{z})\|^2 \\
=& \|\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]\|^2+\|E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]-g(\boldsymbol{z})\|^2 \\
&+(\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}])^{\mathrm{T}}(E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]-g(\boldsymbol{z})) \\
&+(E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]-g(\boldsymbol{z}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}])
\end{aligned}$$

根据随机正交原理式 (3)，可知

$$E\|\boldsymbol{x}-g(\boldsymbol{z})\|^2 = E\|\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]\|^2+E\|E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]-g(\boldsymbol{z})\|^2$$

因此 $E\|\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}]\|^2 \le E\|\boldsymbol{x}-g(\boldsymbol{z})\|^2$。

Theorem 2.4 (高斯条件均值与协方差) 设 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x), \boldsymbol{z} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{z}}, P_z)$，$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{y}}, P_y)$，其中 $P_y = \begin{bmatrix} P_x & P_{xz} \\ P_{zx} & P_z \end{bmatrix}$，$P_{xz} = E(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{z}-\bar{\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}}$。那么

$$E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}) \tag{5}$$

$$P_{x|z} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} \tag{6}$$

Proof 2.7 因为

$$\begin{aligned} f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) &= \frac{f_{xz}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})}{f_z(\boldsymbol{z})} = \frac{f_y(\boldsymbol{y})}{f_z(\boldsymbol{z})} \\ &= \frac{\sqrt{(2\pi)^m |P_z|}}{\sqrt{(2\pi)^{n+m}|P_y|}} \exp\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}} P_y^{-1}(*) - (\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}} P_z^{-1}(*)]\} \end{aligned}$$

考虑到

$$P_y^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & -D^{-1}P_{xz}P_z^{-1} \\ -P_z^{-1}P_{zx}D^{-1} & P_z^{-1} + P_z^{-1}P_{zx}D^{-1}P_{xz}P_z^{-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中，$D = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx}$。从而有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} P_y^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}} \end{bmatrix} - (\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}} P_z^{-1} (\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}) = [\boldsymbol{x} - E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}} P_{x|z}^{-1} [**]$$

其中，$E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}), P_{x|z} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx}$。

注意到

$$\frac{|P_y|}{|P_z|} = |P_{x|z}| \tag{8}$$

于是可导出

$$f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|P_{x|z}|}}\exp\{-\frac{1}{2}[\boldsymbol{x}-E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}P_{x|z}^{-1}[**]\}$$

在上面的证明中，分别用了 $(*)$ 和 $[**]$ 表示前面对应的对称项部分，以简化符号。

Corollary 2.5 在定理2.4条件下，$P_{\tilde{x}_{MV}} = E_z P_{x|z} = P_{x|z}$，即

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{MV} \sim \mathcal{N}(0, P_x - P_{xz} P_z^{-1} P_{zx})$$

Proof 2.8 由推论2.1 可知

$$P_{\tilde{x}_{MV}} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{x|z} f_z(\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = E_z P_{x|z}$$

而定理2.4表明 $P_{x|z} = P_x - P_{xz} P_z^{-1} P_{zx}$，是常值矩阵，因此 $E_z P_{x|z} = P_{x|z}$。结合最小方差估计是无偏估计的结论，所以定理2.4条件下 $\tilde{\boldsymbol{x}}_{MV} \sim \mathcal{N}(0, P_x - P_{xz} P_z^{-1} P_{zx})$。

Theorem 2.5 若 $\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R), \boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x)$，而且 $E\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = 0$（正交），则有

$$E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{x|z}H^{\mathrm{T}}R^{-1}(\boldsymbol{z} - H\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{9}$$

$$P_{x|z} = P_{\tilde{x}_{MV}} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1} \tag{10}$$

Proof 2.9 根据给定的量测方程 $\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$，可导出

$$\bar{\boldsymbol{z}} = H\bar{\boldsymbol{x}}, \quad \mathring{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} - H\bar{\boldsymbol{x}} = H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}$$

$$P_z = E\mathring{\boldsymbol{z}}\mathring{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} = E(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = HP_xH^{\mathrm{T}} + R$$

$$P_{xz} = E\mathring{\boldsymbol{x}}\mathring{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} = E\mathring{\boldsymbol{x}}(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = P_xH^{\mathrm{T}}$$

根据定理2.4可得

$$E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \mathring{\boldsymbol{z}}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}(\boldsymbol{z} - H\bar{\boldsymbol{x}})$$

$$P_{x|z} = P_{\tilde{x}_{MV}} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} = P_x - P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)HP_x$$

由矩阵求逆引理可导出

$$P_x - P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)HP_x = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}$$

所以在线性量测高斯分布条件下，最小方差估计为

$$E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{x|z}H^{\mathrm{T}}R^{-1}(\boldsymbol{z} - H\bar{\boldsymbol{x}})$$

$$P_{x|z} = P_{\tilde{x}_{MV}} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}$$

上述估计误差协方差关系可以表示为

$$P_{x|z}^{-1} = P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} H \tag{11}$$

具有重要的物理含义。另外，注意到

$$I - P_{x|z} H^{\mathrm{T}} R^{-1} H = P_{x|z}(P_{x|z}^{-1} - H^{\mathrm{T}} R^{-1} H) = P_{x|z} P_x^{-1} \tag{12}$$

我们可得定理2.5的另外一种形式。

Theorem 2.6 (线性量测高斯分布最小方差估计) *如果* $\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}$，*当* $\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R)$，$\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x)$，*且* $E\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = 0$，*那么*

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L = P_{\tilde{x}_L}(P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z}) \tag{13}$$

$$P_{\tilde{x}_L}^{-1} = P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} H \tag{14}$$

Example 2.1 设 $x \sim U[0,1]$，即 $f_x(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$.

(1) 求 x 的先验估计 $\bar{x}$;

(2) 如果 x 的量测为 $z = \ln \frac{1}{x} + v$, v 服从指数分布，即

$$f_v(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v \ge 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases}$$

此外假设 x 与 v 相互独立，求 x 的最小方差估计。

Solution 2.1 *(1)* $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$;

(2) 因为 x 与 v 相互独立，因此

$$f_{z|x}(z|x) = f_v(z - \ln\frac{1}{x}) = \begin{cases} e^{-z-\ln\frac{1}{x}}, & z - \ln\frac{1}{x} \geq 0 \\ 0, & z - \ln\frac{1}{x} < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x}e^{-z}, & x \geq e^{-z} \\ 0, & x < e^{-z} \end{cases}$$

所以

$$\hat{x}_{MV}(z) = \frac{\int_{e^{-z}}^{1} e^{-z}\mathrm{d}x}{\int_{e^{-z}}^{1} \frac{1}{x}e^{-z}\mathrm{d}x} = \frac{e^{-z}(1-e^{-z})}{e^{-z}\ln x|_{e^{-z}}^{1}} = \frac{1-e^{-z}}{z}$$

2.2 线性最小方差估计

Definition 2.5 (Linear Minimum Variance Estimation) 取 $L(\tilde{\boldsymbol{x}}) = [\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z})]$ 且形式上限制为 $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a} + B\boldsymbol{z}$ 的贝叶斯估计，其中 $\boldsymbol{a}$ 和 B 分别是常系数向量和矩阵，则称为线性最小方差估计，记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})$。

Lemma 2.1 设 A, B, C 是合适维数的矩阵，关于矩阵迹有如下公式：

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

$$\frac{\partial \mathrm{tr}(ABA^{\mathrm{T}})}{\partial A} = AB + AB^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{tr}(BAC)}{\partial A} = B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$$

Proof 2.10 *(练习)*

Lemma 2.2 令 $L=[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}-B\boldsymbol{z}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}-B\boldsymbol{z}]$，有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{a}}=2(\boldsymbol{a}+B\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B}=2(B\boldsymbol{z}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

Proof 2.11 展开 L 可得

$$L=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{z}-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{z}-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{z}$$

由此可直接可导出式 (15)。另外，对于任意相同维数向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，有

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial B}=\frac{\partial}{\partial B}(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{z}+2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{z}-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{z})$$
$$=\frac{\partial}{\partial B}\mathrm{tr}(B\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+2B\boldsymbol{z}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-2B\boldsymbol{z}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})$$

根据引理2.1，可导出

$$\frac{\partial L}{\partial B}=2B\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}=2(B\boldsymbol{z}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$$

Theorem 2.7 线性最小方差估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})$ 的充要条件为

$$E\left\{[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\right\}=0 \tag{17}$$

$$E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]=0 \tag{18}$$

Proof 2.12 *(1)* 充分性：设以上两式成立，对任意的 $\hat{\boldsymbol{x}}$，有

$$\begin{aligned}E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 &= E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})+\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\\ &= E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})\|^2+E\|\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\\ &+E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]^{\mathrm{T}}[\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}]+E[\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]\end{aligned}$$

记 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{a}_o+B_o\boldsymbol{z}$，$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{a}+B\boldsymbol{z}$，那么 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{a}_o-\boldsymbol{a}+(B_o-B)\boldsymbol{z}$，可见

$$\begin{aligned}&E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})][\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}]^{\mathrm{T}}\\ =\ &E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})][\boldsymbol{a}_o-\boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}}+E\left\{[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(B_o-B)^{\mathrm{T}}\right\}=0\end{aligned}$$

同时说明 $E[\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]=0$，因而有

$$E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2=E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})\|^2+E\|\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \tag{19}$$

所以

$$E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})\|^2 \leq E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 \tag{20}$$

说明 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})$ 是线性最小方差估计。

(2) 必要性：设 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = A_o + B_o\boldsymbol{z}$ 是线性最小方差估计，由式 (17) 可得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}} E\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}-B\boldsymbol{z})\|^2|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_o, B=B_o} = -2E[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_o-B_o\boldsymbol{z}] = 0$$

即 $E[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})] = 0$。而由式 (18) 可得

$$\frac{\partial}{\partial B} E\|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}-B\boldsymbol{z})\|^2|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_o, B=B_o} = -2E\{[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}_o-B_o\boldsymbol{z}]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\} = 0$$

因此 $E\left\{[\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\right\} = 0$。

Corollary 2.6 对任意合适维数的矩阵 A 和向量 $\boldsymbol{b}$，有

$$E\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})\|^2 \le E\|\boldsymbol{x}-A\boldsymbol{z}-\boldsymbol{b}\|^2 \qquad (21)$$

Theorem 2.8 (线性最小方差估计及其协方差)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}) \tag{22}$$

$$P_{\tilde{x}_L} = E\tilde{\boldsymbol{x}}_L\tilde{\boldsymbol{x}}_L^{\mathrm{T}} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} \tag{23}$$

Proof 2.13 设 $\hat{x}_L(z) = \boldsymbol{a}_o + B_o\boldsymbol{z}$，根据线性最小方差估计充要条件 (18) 可知

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}_o + B_o\bar{\boldsymbol{z}} \tag{24}$$

而由式 (17) 可得

$$E\left\{[\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} + \bar{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z})]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\right\} = 0 \Rightarrow E\left\{[\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\right\} = E\left\{[\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) - \bar{\boldsymbol{x}}]\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\right\}$$

因此

$$P_{xz} = E\left\{[\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) - \bar{\boldsymbol{x}}][\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}]^{\mathrm{T}}\right\} \tag{25}$$

注意到

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) - \bar{\boldsymbol{x}} = B_o(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})$$

上式两边右乘 $[z - \bar{z}]^{\mathrm{T}}$ 并取数学期望，并带入式 (24)，得

$$P_{xz} = B_o P_z \Rightarrow B_o = P_{xz} P_z^{-1}$$

将上式带入式 (25)，可得

$$\boldsymbol{a}_o = \bar{\boldsymbol{x}} - P_{xz} P_z^{-1} \bar{\boldsymbol{z}}$$

将 $\boldsymbol{a}_o, B_o$ 带入 $\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{a}_o + B_o\boldsymbol{z}$，即得

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})$$

由上式可知

$$\begin{aligned} P_{\hat{\boldsymbol{x}}_L} =& E\left\{[\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{x}][\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\right\} \\ =& E\left\{[\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})][\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})]^{\mathrm{T}}\right\} \\ =& P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} \end{aligned}$$

上式中用到了 $P_z^{\mathrm{T}} = P_z, P_{zx} = P_{xz}^{\mathrm{T}}$。

Theorem 2.9 当 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \sim$ 高斯分布时，$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z})$。

Proof 2.14 在高斯分布假设下，最小方差估计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})$$

比较 (22) 即得证。此外，还有 $P_{x|z} = P_{\tilde{x}_L}$。即在正态分布情况下，线性最小方差估计即为最小方差估计。

Example 2.2 设 z 为量测值，x_1, x_2 为未知的随机量，A, B, r 是确定性量，此外，$y = Ax_1 + Bx_2 + r + w$。w 为随机噪声，与 z 不相关，而且 $Ew = 0$，证明

(1) $\hat{y}_L(z) = A\hat{x}_{1L}(z) + B\hat{x}_{2L}(z) + r$;

(2) $E\tilde{y}_L(z) = 0$。

Solution 2.2 由定理2.7可知 $\hat{y}_L(z) = \bar{y} + P_{yz}P_z^{-1}(z - \bar{z})$。其中

$$\bar{y} = A\bar{x}_1 + B\bar{x}_2 + r$$
$$P_{yz} = E[y - \bar{y}][z - \bar{z}]^{\mathrm{T}} = AP_{x_1z} + BP_{x_2z}$$

所以

$$\begin{aligned}\hat{y}_L(z) =& A\bar{x}_1 + B\bar{x}_2 + r + (AP_{x_1z} + BP_{x_2z})P_z^{-1}(z - \bar{z})\\ =& A\bar{x}_1 + AP_{x_1z}P_z^{-1}(z - \bar{z}) + B\bar{x}_2 + BP_{x_2z}P_z^{-1}(z - \bar{z}) + r\\ =& A\hat{x}_{1L}(z) + B\hat{x}_{2L}(z) + r\end{aligned}$$

另外注意到 $E\hat{y}_L(z) = A\bar{x}_1 + B\bar{x}_2 + r = \bar{y}$, 因此有

$$E\tilde{y}_L(z) = E[\hat{y}_L(z) - E\hat{y}_L(z)] = E[\hat{y}_L(z) - \bar{y}] = 0$$

Corollary 2.7 若 $z_1, z_2, \cdots, z_k$ 互不相关，那么

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_k) = \hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}_1) + \hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}_2) + \ldots + \hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}_k) - (k-1)\bar{\boldsymbol{x}}$$

Proof 2.15 令

$$\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

那么

$$\bar{\boldsymbol{z}} = [\bar{\boldsymbol{z}}_1^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \bar{\boldsymbol{z}}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

$$P_{xz} = E(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}} = [P_{xz_1}, P_{xz_2}, \cdots, P_{xz_k}]$$

$$P_z = \begin{bmatrix} P_{\boldsymbol{z}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{\boldsymbol{z}_k} \end{bmatrix}$$

根据定理2.7，可知

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}) = \bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i=1}^{k} P_{xz_i}P_{z_i}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \bar{\boldsymbol{z}}_i)$$

考虑到

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}_i) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz_i}P_{z_i}^{-1}(\boldsymbol{z}_i - \bar{\boldsymbol{z}}_i)$$

所以

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{k} \hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}_i) - (k-1)\bar{\boldsymbol{x}}$$

Example 2.3 设 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x), \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, P_v)$，两者不相关，如果

$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{26}$$

试求 $\boldsymbol{x}$ 的线性最小方差估计。

Solution 2.3 根据线性最小方差估计定理2.8

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})$$
$$P_{\tilde{x}_L} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx}$$

由 (26) 可知 $\bar{\boldsymbol{z}} = H\bar{\boldsymbol{x}}$，令 $\mathring{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, \mathring{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}} = H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v}$，可得

$$P_z = E[\mathring{\boldsymbol{z}}\mathring{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}}] = HP_xH^{\mathrm{T}} + P_v$$
$$P_{xz} = E(\mathring{\boldsymbol{x}})\mathring{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} = E(\mathring{\boldsymbol{x}})(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = P_xH$$

因此

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{x}} + P_x H(HP_xH^{\mathrm{T}} + P_v)^{-1}(Hz - \bar{\boldsymbol{z}}) \tag{27}$$

$$P_{\tilde{x}_L} = P_x - P_x H(HP_xH^{\mathrm{T}} + P_v)^{-1}H^{\mathrm{T}}P_x \tag{28}$$

考虑到

$$I - P_x H(HP_xH^{\mathrm{T}} + P_v)^{-1}H = P_{\tilde{x}_L}P_x^{-1}$$

$$P_x H(HP_xH^{\mathrm{T}} + P_v)^{-1}H = I - P_{\tilde{x}_L}P_x^{-1} = P_{\tilde{x}_L}(P_{\tilde{x}_L}^{-1} - P_x^{-1})$$

将以上两式代入 (27)，可得

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = P_{\tilde{x}_L}P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + P_{\tilde{x}_L}(P_{\tilde{x}_L}^{-1} - P_x^{-1})\boldsymbol{z} \tag{29}$$

另外应用矩阵求逆引理，由 (28) 可知

$$P_{\tilde{x}_L}^{-1} = P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}P_v^{-1}H \tag{30}$$

代入 (27)，最后导出

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = P_{\tilde{x}_L} P_x^{-1} \bar{\boldsymbol{x}} + P_{\tilde{x}_L} H^{\mathrm{T}} P_v^{-1} H \boldsymbol{z} \tag{31}$$

(30) 和 (31) 即为简化表达的结果。总结起来，$\boldsymbol{x}$ 的线性最小方差估计及其协方差矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L(\boldsymbol{z}) = P_{\tilde{x}_L}(P_x^{-1} \bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}} P_v^{-1} H \boldsymbol{z}) \tag{32}$$

$$P_{\tilde{x}_L}^{-1} = P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}} P_v^{-1} H \tag{33}$$

以上两式和 (27) 与 (28) 数学上是等价的。

Example 2.4 已知 $z = x + v, x \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_x^2), v \sim \mathcal{N}(0,\sigma_v^2)$，试求 x 的线性最小方差估计。

Solution 2.4 由于 $H = 1$，$P_v = \sigma_v^2$，所以

$$H^{\mathrm{T}} P_v^{-1} H = \sigma_v^{-2}$$

又 $P_x = \sigma_x^2$，由 (33) 可知

$$P_{\tilde{x}_L}^{-1} = \sigma_{\tilde{x}_L}^{-2} = \sigma_x^{-2} + \sigma_v^{-2} \tag{34}$$

由 (32) 可以求得

$$\hat{x}_L(z) = \frac{\sigma_x^2 \sigma_v^2}{\sigma_x^2 + \sigma_v^2}\left(\frac{1}{\sigma_x^2}\bar{x} + \frac{1}{\sigma_v^2} z\right) \tag{35}$$

如果没有任何先验信息，意味着 $\sigma_x^{-2} = 0$，此时

$$\hat{x}_L(z) = z$$

如果量测误差特别大，即 $\sigma_v^{-2} \to 0$，则

$$\hat{x}_L(z) = \bar{x}$$

这称为先验估计。

Example 2.5 已知 $z = \ln\frac{1}{x} + v, x \sim U[0,1]$, v 服从指数分布，即

$$f_v(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases}$$

假设 x 与 v 相互独立，试求 x 的线性最小方差估计。

Solution 2.5 因为 $\bar{x} = 1/2, f_{xz}(x,z) = f_(z|x)(z|x)f_x(x)$，注意到

$$f_{z|x}(z|x) = f_v(z - \ln\frac{1}{x}) = \begin{cases} e^{-(z-\ln\frac{1}{x})}, & z - \ln\frac{1}{x} \geq 0 \\ 0, & z - \ln\frac{1}{x} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{-z}, & x \geq e^{-z} \\ 0, & x < e^{-z} \end{cases}$$

$$f_{xz}(x,z) = f_{z|x}(z|x)f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}e^{-z}, & 1 \geq x \geq e^{-z} \\ 0, & 0 \leq x < e^{-z} \end{cases}$$

所以

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{xz}(x,z)\mathrm{d}x=\begin{cases} ze^{-z}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

因此

$$Exz=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xzf_{xz}(x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{3}{4}$$

$$P_{xz}=E(x-\bar{x})(z-\bar{z})=Exz-\bar{x}\bar{z}=-\frac{1}{4}$$

$$P_z=E(z-\bar{z})^2=Ez^2-\bar{z}^2=\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_z(z)\mathrm{d}z-[\int_{-\infty}^{+\infty} zf_z(z)\mathrm{d}z]^2=6-2^2$$

根据定理2.7，可得

$$x_L=\bar{x}+P_{xz}P_z^{-1}(z-\bar{z})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(z-2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}z$$

Remark 2.1 在这个问题中

$$P(Z \leq z|X = x) = P(\frac{1}{\ln x} + V \leq z) = P(V \leq z - \frac{1}{\ln x})$$

由此可知

$$F_{z|x}(z|x) = F_v(z - \frac{1}{\ln x}) \quad \Rightarrow \quad f_{z|x}(z|x) = f_v(z - \frac{1}{\ln x})$$

在上面示例求解过程中，直接用到了上式。

2.3 最大后验估计

Definition 2.6 (Maximum A Posteriori Estimation) 使 $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) \Rightarrow \max$ 的估计称为 $\boldsymbol{x}$ 的最大后验估计，记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MA}(\boldsymbol{z})$。称

$$\left.\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}_{MA}} = 0 \tag{36}$$

为后验方程。

Theorem 2.10 若 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ 服从联合高斯分布，那么 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MA}(\boldsymbol{z}) = \hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z})$。

Proof 2.16 因为

$$f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P_{x|z}|}} \exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}} P_{x|z}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})\}$$

可见

$$\frac{\partial \ln f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}})^{\mathrm{T}} P_{x|z}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}}) \Rightarrow \min$$

所以

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MA}(\boldsymbol{z}) = \hat{\boldsymbol{x}}_{MV}(\boldsymbol{z}) = \overline{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}}$$

Theorem 2.11 取代价函数为 $L(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} 0, & \|\tilde{\boldsymbol{x}}\| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon}, & \|\tilde{\boldsymbol{x}}\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ ($\varepsilon > 0$ 且足够小)，由此获得的贝叶斯估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_B(\boldsymbol{z})$ 即为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MA}(\boldsymbol{z})$。

3. 极大似然估计

Definition 3.1 (Maximum-Likelihood Estimation) *使似然函数*

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) \tag{37}$$

最大的估计称为 $\boldsymbol{x}$ 的极大似然估计，记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}(\boldsymbol{z})$。

一般通过求解似然方程获得极大似然估计，似然方程是指

$$\left.\frac{\partial \ln \Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}} = \left.\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}} = 0 \tag{38}$$

Example 3.1 已知 $z = \ln\frac{1}{x} + v, x \sim U(0,1)$，$v$ 服从指数分布，即

$$f_v(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases}$$

假设 x 与 v 相互独立，试求 x 的极大似然估计 $\hat{x}_{ML}$。

Solution 3.1 因为

$$f_{z|x}(z|x) = f_v(z - \ln\frac{1}{x}) = \begin{cases} e^{-(z-\ln\frac{1}{x})}, & z - \ln\frac{1}{x} \geq 0 \\ 0, & z - \ln\frac{1}{x} < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x}e^{-z}, & x \geq e^{-z} \\ 0, & x < e^{-z} \end{cases}$$

所以 $\hat{x}_{ML} = e^{-z}$。

Theorem 3.1 当对 $\boldsymbol{x}$ 的先验信息一无所知时，$\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}(\boldsymbol{z}) = \hat{\boldsymbol{x}}_{MA}(\boldsymbol{z})$

Proof 3.1 由

$$f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) = \frac{f_{zx}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{x})}{f_x(\boldsymbol{x})} = \frac{f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})f_z(\boldsymbol{z})}{f_x(\boldsymbol{x})}$$

可知

$$\ln f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) = \ln f_{z|x}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) + \ln f_z(\boldsymbol{z}) - \ln f_x(\boldsymbol{x})$$

当对 $\boldsymbol{x}$ 的先验信息一无所知时

$$\frac{\partial \ln f_x(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

因此

$$\frac{\partial \ln f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \ln f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{x}}$$

从而导出

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}(\boldsymbol{z}) = \hat{\boldsymbol{x}}_{MA}(\boldsymbol{z})$$

Theorem 3.2 (Linear Gaussian Measurement) 如果 $\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R)$，那么

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z} \tag{39}$$

Proof 3.2 因为

$$\begin{aligned} f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) = f_v(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |R|}} \exp\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{v}\}\Big|_{v=z-Hx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |R|}} \exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} R^{-1} (\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x})\} \end{aligned}$$

显然，极大化似然函数相当于

$$J = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} R^{-1} (\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x}) \Rightarrow \min$$

由此，有

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}} = -H^{\mathrm{T}} R^{-1} (\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x}) = 0$$

当 $H^{\mathrm{T}} R^{-1} H$ 非奇异时，即有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{ML}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z}$$

Corollary 3.1 线性量测高斯噪声条件下，有

(1) $E\tilde{\boldsymbol{x}}_{ML} = 0$; (无偏估计)

(2) $P_{\tilde{x}_{ML}} = (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}$;

(3) $\hat{\boldsymbol{x}}_{ML} = P_{\tilde{x}_{ML}}H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z}$。

Remark 3.1 (1) 推论3.1 中 (2)、(3) 合称为 Gauss-Markov 估计器；

(2) 特别地，$P_{\tilde{x}_{ML}}$ 与测量值无关；

(3) 当 $H = I, P_{\tilde{x}_{ML}} = R$，此时 $\hat{\boldsymbol{x}}_{ML} = \boldsymbol{z}$；

(4) 如果没有先验知识，可以认为 $\bar{\boldsymbol{x}} = 0, P_x \to \infty$，由线性高斯量测最小方差估计知

$$\begin{cases} E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{x|z}H^{\mathrm{T}}R^{-1}(\boldsymbol{z} - H\bar{\boldsymbol{x}}) \\ P_{x|z} = P_{\tilde{x}_{MV}} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1} \end{cases}$$

可见，此时 $E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}] \to \hat{\boldsymbol{x}}_{ML}, P_{\tilde{x}_{MV}} = P_{\tilde{x}_{ML}} = (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}$。

Example 3.2 设 x 是服从参数为 (μ, σ) 的正态分布的随机变量，即

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

假设进行了 N 次独立的采样，获得了相互独立的 $x_1, x_2, \cdots, x_N$，试估计参数 (μ, σ)。

Solution 3.2 根据独立性假设，可知

$$\Lambda(\mu,\sigma)=f(x_1,x_2,\cdots,x_N|\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N\sigma^N}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\}$$

根据似然函数极大化条件 $\frac{\partial\Lambda(\mu,\sigma)}{\partial\mu}=0, \frac{\partial\Lambda(\mu,\sigma)}{\partial\sigma}=0$，可得

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)=0,\quad \sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2-N\sigma^2=0$$

由此可得两个参数的极大似然估计如下：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

Example 3.3 设估计确定性电压 x 有两种不同的方案，其一是用两个昂贵的电压表，它们的测量噪声为 $\mathcal{N}(0,2)$；其二是用四个廉价的电压表，它们的测量噪声为 $\mathcal{N}(0,3.5)$。问哪一种方案测量到的结果更加可靠？

Solution 3.3 *(a)* 用两个昂贵的电压表时

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x+\boldsymbol{v}$$

其中，$\boldsymbol{v}\sim\mathcal{N}(0,\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix})$。因此

$$P_{\tilde{x}}=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}=\left[[1,1]\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right]^{-1}=1$$

(*b*) 用四个廉价电压表时

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \boldsymbol{v}$$

其中，$\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, 3.5I)$。此时

$$P_{\tilde{x}} = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} = \frac{7}{8}$$

结论：第二个方案更可靠些。

3.1 克拉默-拉奥下界

Theorem 3.3 *(1)* 设 $\hat{x}$ 为确定性量 x 基于测量 z 的无偏估计，那么

$$P_{\tilde{\boldsymbol{x}}} \geq J_F^{-1} \tag{40}$$

其中

$$\begin{aligned} J_F =& E\left\{[\frac{\partial \ln \Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}][\frac{\partial \ln \Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}]^{\mathrm{T}}\right\} && \text{(41a)} \\ =& -E[\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}] && \text{(41b)} \end{aligned}$$

称为费希尔信息矩阵 (*Fisher Information Matrix*)。此外，$\Lambda(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})$。

(2) 设 $\hat{x}$ 为随机量 x 基于量测 z 的无偏估计，那么

$$P_{\tilde{\boldsymbol{x}}} \geq L^{-1} \tag{42}$$

其中

$$L = E\left\{[\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{x}}][\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{x}}]^{\mathrm{T}}\right\} \tag{43a}$$

$$= -E[\frac{\partial^2 \ln f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}] \tag{43b}$$

称为信息矩阵 (*information matrix*)。

Lemma 3.1 (Schwarz Inequality) 设 $f, g \in L^2$，那么

$$\begin{cases} < f, g > \leq \|f\| \cdot \|g\| \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\boldsymbol{x})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\boldsymbol{x})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \end{cases} \tag{44}$$

Remark 3.2 施瓦尔兹不等式可以类比于常规三维空间中的点积计算。在空间解析几何中，一般向量的点积公式为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$。这里，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是常规三维空间中任意两个向量。

对于确定性标量估计情况，$\Lambda(x) = f(z|x)$。因为

$$E[\hat{x}(z) - x] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{x}(z) - x] f(z|x)\mathrm{d}z = 0 \tag{45}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{x}(z) - x] f(z|x)\mathrm{d}z = 0 \tag{46}$$

于是

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|x)\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{x}(z) - x] \frac{\partial}{\partial x} f(z|x)\mathrm{d}z = 0 \tag{47}$$

从而有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{x}(z) - x] \frac{\partial \ln f(z|x)}{\partial x} f(z|x)\mathrm{d}z = 1 \tag{48}$$

由施瓦尔兹不等式可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[\hat{x}(z)-x]^2 f(z|x)\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{\partial \ln f(z|x)}{\partial x}]^2 f(z|x)\mathrm{d}z \geq 1 \tag{49}$$

即

$$P_{\tilde{x}} \geq \{E[\frac{\partial \ln f(z|x)}{\partial x}]^2\}^{-1} \tag{50}$$

又根据 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z|x)\mathrm{d}z = 1$，可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \ln f(z|x)}{\partial x} f(z|x)\mathrm{d}\boldsymbol{z} = 0 \tag{51}$$

可化为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln f(z|x)}{\partial x^2} f(z|x)\mathrm{d}z = -\int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{\partial \ln f(z|x)}{\partial x}]^2 f(z|x)\mathrm{d}z \tag{52}$$

因此有

$$E[\frac{\partial^2 \ln f(z|x)}{\partial x^2}] = -E\{[\frac{\partial \ln f(z|x)}{\partial x}]^2\} \tag{53}$$

到此完成了标量情况下定理3.3 的证明。

Remark 3.3

- 似然函数比后验概率要容易获得；
- 极大似然估计中，被估计量 x 可以是随机变量，也可以是非随机参数；
- 当有先验信息时，极大似然估计的精度不如最大后验估计；
- 对于确定性未知量 x，随着量测样本数 N 增加 $(N \to +\infty)$，$\hat{x}_{ML}$ 依概率收敛于真值 x；（任何具有该性质的估计称为一致的）
- 极大似然估计是渐进高斯的，即当 $N \to +\infty$，$\hat{x}_{ML} \sim \mathcal{N}(x, P_{\tilde{x}})$；
- 当 $N \to +\infty$，极大似然估计 $\hat{x}_{ML}$ 是有效的（估计误差协方差达到克拉默-拉奥下界）。

4. 最小二乘估计

设 $\boldsymbol{x}$ 是未知的常值向量，考虑线性量测

$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{54}$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 为量测误差或噪声。我们的问题是基于 $\boldsymbol{z}$ 求 $\boldsymbol{x}$ 的最佳估计 $\hat{\boldsymbol{x}}$。

4.1 基本最小二乘估计

Definition 4.1 使指标函数

$$J(\hat{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{z} - H\hat{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z} - H\hat{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \min \tag{55}$$

的估计 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的最小二乘估计，记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z})$。

Theorem 4.1 *(1)* 当 $H^{\mathrm{T}}H$ 非奇异时，$\hat{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$。

(2) 若 $\boldsymbol{v}$ 为零均值噪声，那么 $E\tilde{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z}) = 0$。

Proof 4.1 由

$$\frac{\partial J(\hat{\boldsymbol{x}})}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}} = -2H^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z} - H\hat{\boldsymbol{x}}) = 0 \tag{56}$$

可知

$$H^{\mathrm{T}}H\hat{\boldsymbol{x}} = H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \tag{57}$$

$H^{\mathrm{T}}H$ 是方阵，如果非奇异，则

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \tag{58}$$

$H^{\mathrm{T}}H$ 非奇异保证了 $J(\hat{x})$ 关于 $\hat{x}$ 的二阶导数矩阵非负定，说明上式的确是最优解。

将 (54) 代入 (58)，得

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} + \left(H^{\mathrm{T}} H\right)^{-1} H^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}$$

如果 $E\boldsymbol{v} = 0$，则

$$E\hat{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}$$

即

$$E\tilde{\boldsymbol{x}}_{LS}(\boldsymbol{z}) = 0$$

Example 4.1 用万用表对未知阻值的电阻进行 k 次测量，根据含噪声的 k 个测量 $z_i(i=1,2,\cdots,k)$ 对电阻值 x 进行估计。此时，x 是一个标量，k 个含噪声的测量值如下：

$$\begin{aligned} z_1 &= x + v_1 \\ &\vdots \\ z_k &= x + v_k \end{aligned}$$

写成矩阵方程形式

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

由 (58) 可得电阻值 x 的最小二乘估计为

$$\hat{x}_{LS}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = \left([1\cdots 1]\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)^{-1}[1\cdots 1]\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_k\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{k}(z_1 + z_2 + \cdots + z_k)$$

$\square$

4.2 加权最小二乘估计

Definition 4.2 设 W 是正定对称方阵，使指标函数

$$J(\hat{\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{z} - H\hat{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}} W (\boldsymbol{z} - H\hat{\boldsymbol{x}})$$

最小的估计 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的加权最小二乘估计，记为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{WLS}(\boldsymbol{z})$。

Theorem 4.2 当 $H^{\mathrm{T}}WH$ 非奇异时

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{WLS}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}}WH)^{-1}H^{\mathrm{T}}W\boldsymbol{z} \tag{59}$$

若 $\boldsymbol{v}$ 为零均值噪声，$\hat{\boldsymbol{x}}_{WLS}(\boldsymbol{z})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的无偏估计。如果进一步假设 $R = E[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}]$，那么

$$P_{\tilde{x}_{WLS}} = (H^{\mathrm{T}}WH)^{-1}H^{\mathrm{T}}WRWH(H^{\mathrm{T}}WH)^{-1} \tag{60}$$

Theorem 4.3 (Markov 估计) 设 $\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R)(R > 0)$，取 $W = R^{-1}$，那么

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{WLS}(\boldsymbol{z}) = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z} \tag{61}$$

而且此时估计的均方误差最小，

$$P_{\tilde{x}_{WLS}} = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} \tag{62}$$

Proof 4.2 将 $W = R^{-1}$ 带入一般的加权最小二乘估计 *(59)*，即可得到 *(61)*。同时由 *(61)* 可导出 *(62)* 。此外，根据线性量测高斯分布情况下的线性最小方差估计定理，可知

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L = P_{\tilde{x}_L}(P_x^{-1} \bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z}) \tag{63}$$

$$P_{\tilde{x}_L}^{-1} = P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} H \tag{64}$$

在最小二乘估计中，认为没有 $\boldsymbol{x}$ 的先验信息 ($P_x^{-1}=0$)，所以此时的最小方差估计为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_L = P_{\tilde{x}_{LMV}} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z}$$
$$P_{\tilde{x}_L}^{-1} = H^{\mathrm{T}} R^{-1} H$$

与 (61)、(62) 是一致的，即说明了此时的加权最小二乘估计的均方误差最小。

Example 4.2 在例题4.1中，假设 $v_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)(i = 1, \cdots, k)$，同时认为每次测量是独立进行的，即

$$R = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \cdots, \sigma_k^2)$$

此时电阻值的最优估计为

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{WLS}(\boldsymbol{z}) &= (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z} \\
&= \left([1 \cdots 1] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \cdots 1] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} 1/\sigma_i^2} \left(\frac{z_1}{\sigma_1^2} + \frac{z_2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{z_k}{\sigma_k^2} \right) \qquad (65)
\end{aligned}$$

可见每次的测量精度作为权重进入了最后的估计，当 $\sigma_i^2 = \sigma^2$(每次测量精度相同)，则退化为例题4.1了。

4.3 递推最小二乘估计

假设我们已经获得了 k 时刻的最小二乘估计，即由

$$\boldsymbol{z}_k = H_k \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}_k \tag{66}$$

得到了加权最小二乘估计

$$P_k = (H_k^{\mathrm{T}} W_k H_k)^{-1} \tag{67}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = P_k H_k^{\mathrm{T}} W_k \boldsymbol{z}_k \tag{68}$$

如果现在又获得了 $k+1$ 时刻的量测，即

$$z_{k+1} = h_{k+1} \boldsymbol{x} + v_{k+1} \tag{69}$$

注意，一般情况下这仍然是一个向量形式的测量方程。

综合考虑 (66) 和 (69)，加权最小二乘意味着

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_k \\ z_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_k \\ h_{k+1} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right)^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} W_k & 0 \\ 0 & w_{k+1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_k \\ z_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_k \\ h_{k+1} \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}\right) \Rightarrow \min$$

即为

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{z}_k - H_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1})^{\mathrm{T}} W_k (\boldsymbol{z}_k - H_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}) \\ +(z_{k+1} - h_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1})^{\mathrm{T}} w_{k+1} (z_{k+1} - h_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}) \Rightarrow \min\end{gathered}$$

由极值必要条件，可得

$$H_k^{\mathrm{T}} W_k (\boldsymbol{z}_k - H_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}) + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} (z_{k+1} - h_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow (H_k^{\mathrm{T}} W_k H_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} h_{k+1})\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = H_k^{\mathrm{T}} W_k \boldsymbol{z}_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} z_{k+1}$$

考虑到 (68), 上式可写为

$$(H_k^{\mathrm{T}} W_k H_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} h_{k+1}) \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = P_k^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} z_{k+1} \tag{70}$$

而由 (67) 可知

$$P_{k+1} = \left(\begin{bmatrix} H_k \\ h_{k+1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} W_k & 0 \\ 0 & w_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_k \\ h_{k+1} \end{bmatrix} \right)^{-1} = (H_k^{\mathrm{T}} W_k H_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} h_{k+1})^{-1}$$

带入 (67)，(70) 化为出

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = P_{k+1} (P_k^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} z_{k+1}) \tag{71}$$

其中

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + h_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} h_{k+1})^{-1} \tag{72}$$

式 (71) 和式 (72) 一起构成了递推最小二乘估计。

如果知道 $v_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, R_{k+1})$，可以取 $w_{k+1} = R_{k+1}^{-1}$，此时**递推最小二乘估计算法公式为**

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = P_{k+1}(P_k^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_k + h_{k+1}^{\mathrm{T}} R_{k+1}^{-1} z_{k+1}) \tag{73}$$

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + h_{k+1}^{\mathrm{T}} R_{k+1}^{-1} h_{k+1} \tag{74}$$

递推最小二乘估计也有其他等价形式，例如由 (74) 可知

$$P_{k+1}P_k^{-1} = I - P_{k+1}h_{k+1}^{\mathrm{T}} R_{k+1}^{-1} h_{k+1} \tag{75}$$

代入 (71)，可得如下结构的递推最小二乘估计

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_k + K_{k+1}[z_{k+1} - h_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k] \tag{76}$$

其中

$$K_{k+1} = P_{k+1} h_{k+1}^{\mathrm{T}} R_{k+1}^{-1} \tag{77}$$

由矩阵求逆引理，(72) 可以化为

$$P_{k+1} = P_k - P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}} (R_{k+1} + h_{k+1} P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1} h_{k+1} P_k \tag{78}$$

这样可以减小递推计算量。(76) 、(77) 和 (78) 构成了一组完整的递推算法。

由 (77)，可得

$$P_{k+1}h_{k+1}^{\mathrm{T}} = K_{k+1}R_{k+1} \tag{79}$$

由 (78) 可知

$$\begin{aligned}
P_{k+1}h_{k+1}^{\mathrm{T}} &= P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}} - P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}(R_{k+1} + h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1}h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}} \\
&= P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}(R_{k+1} + h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1}[(R_{k+1} + h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}) - h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}] \\
&= P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}(R_{k+1} + h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1}R_{k+1}
\end{aligned}$$

比较 (77)，可得 K_{k+1} 的另外一个计算公式

$$K_{k+1} = P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}(R_{k+1} + h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{80}$$

代入 (78)，可得

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1}h_{k+1})P_k \tag{81}$$

(76) 、(80) 和 (81) 是另外一组常见的递推公式，汇总如下：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} &= \hat{\boldsymbol{x}}_k + K_{k+1}[z_{k+1} - h_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k] \\
K_{k+1} &= P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}}(R_{k+1} + h_{k+1}P_k h_{k+1}^{\mathrm{T}})^{-1} \\
P_{k+1} &= (I - K_{k+1}h_{k+1})P_k
\end{aligned}$$

Example 4.3 仍然考虑例题4.1中的问题，即用万用表对未知阻值的电阻进行测量，这里用递推最小二乘估计来求解。k 时刻的量测方程为

$$z_k = x + v_k$$

假设 $v_k \sim (0, R_k)$, $R_k = R$。本问题中 $h_{k+1} = 1$。

$k = 0$: （给定 $\hat{x}_0$，P_0）

$$K_1 = \frac{P_0}{R + P_0}, \quad P_1 = (1 - K_1)P_0 = \frac{RP_0}{R + P_0}$$

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_0 + K_1(z_1 - \hat{x}_0) = (1 - K_1)\hat{x}_0 + K_1 z_1 = \frac{R}{R + P_0}\hat{x}_0 + \frac{P_0}{R + P_0} z_1$$

$k=1$:

$$K_2 = \frac{P_1}{R+P_1} = \frac{P_0}{R+2P_0}, \quad P_2 = (1-K_2)P_1 = \frac{RP_0}{R+2P_0}$$

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + K_2(z_2 - \hat{x}_1) = \frac{R+P_0}{R+2P_0}\hat{x}_1 + \frac{P_0}{R+2P_0}z_2$$

一般地 $k \geq 1$:

$$K_k = \frac{P_{k-1}}{R+P_{k-1}} = \frac{P_0}{R+kP_0}, \quad P_k = \frac{RP_0}{R+kP_0}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - \hat{x}_{k-1}) = (1-K_k)\hat{x}_{k-1} + K_k z_k \\ &= \frac{R+(k-1)P_0}{R+kP_0}\hat{x}_{k-1} + \frac{P_0}{R+kP_0}z_k\end{aligned}$$

我们分三种初始条件进行讨论：

(1) $\hat{x}_0 = \bar{x}_0, \ P_0 = 0$

$$K_k = 0: \quad \hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} = \cdots = \bar{x}_0$$

说明无需量测。

(2) $R = +\infty$。

$$K_k = 0: \quad \hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} = \cdots = \bar{x}_0$$

说明量测不能带来任何有意义信息。

(3) $\hat{x}_0 = \bar{x}_0$, $P_0 = +\infty$。

$$K_k = \frac{1}{k}: \ \hat{x}_k = \frac{k-1}{k}\hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}z_k = \frac{1}{k}[(k-1)\hat{x}_{k-1} + z_k]$$

说明电阻值的最优估计就是量测值的几何平均，即

$$\hat{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i = \frac{1}{k}[(k-1)\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} z_i + z_k] = \frac{1}{k}[(k-1)\hat{x}_{k-1} + z_k]$$

Remark 4.1

- 最小二乘估计不需要任何统计信息，但精度较低，适用于确定量或变化规律确定的量之估计。
- 在递推最小二乘估计中，初始估计 $\hat{x}_0$ 可取为零向量、初始 P_0 矩阵可取为元素足够大的对角线阵。若干步后，初值的影响就会逐渐消失。
- 滑动窗技术与遗忘因子法是工程中有效的改进算法。

5. 『经典参数估计与融合估计算法』

在经典估计理论中，一般考虑如下量测方程：

$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{82}$$

其中，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $H \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^N \sim \mathcal{N}(0, R)$。此外，$R \in \mathbb{R}^{N\times N}$。估计问题就是基于量测 $\boldsymbol{z}$，对未知量 $\boldsymbol{x}$ 进行推断。

5.1 最小二乘估计

取权重矩阵为 $W=R^{-1}$，（加权）最小二乘估计 意味着

$$J=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}-H\boldsymbol{x}\|_{R^{-1}}^{2}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-H\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}R^{-1}(\boldsymbol{z}-H\boldsymbol{x})\Rightarrow\min$$

由此可得

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{LMS}=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z}$$

估计误差为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}}_{LMS}=\hat{\boldsymbol{x}}_{LMS}-\boldsymbol{x}&=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}R^{-1}(H\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})-\boldsymbol{x}\\&=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

根据量测噪声 $\boldsymbol{v}$ 的性质，易知

$$E\tilde{\boldsymbol{x}}_{LMS}=0,\qquad P_{\tilde{x}_{LMS}}=E[\tilde{\boldsymbol{x}}_{LMS}(\tilde{\boldsymbol{x}}_{LMS})^{\mathrm{T}}]=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}$$

对于确定性未知量 $\boldsymbol{x}$，有

$$E\hat{\boldsymbol{x}}_{LMS}=\boldsymbol{x},P_{\hat{x}_{LMS}}=E(\hat{\boldsymbol{x}}_{LMS}-\boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{x}}_{LMS}-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}=P_{\tilde{x}_{LMS}}$$

所以，最小二乘估计可以表示为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}_{LMS}=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z}\\ P_{\tilde{x}_{LMS}}=(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}\end{cases}\tag{83}$$

5.2 极大似然估计

而极大似然估计 是指

$$f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) \Rightarrow \max \qquad \text{或} \qquad \ln f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) \Rightarrow \max$$

对于系统 (82)，注意到给定 $\boldsymbol{x}$ 时 $\boldsymbol{z} \sim \mathcal{N}(H\boldsymbol{x}, R)$，上述极值问题变为

$$J = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} R^{-1} (\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x}) \Rightarrow \min$$

由此可得

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{ML} = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z} \\ P_{\tilde{x}_{ML}} = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} \end{cases} \tag{84}$$

不难发现，极大似然估计和最小二乘估计是一致的。

5.3 最大后验估计

最大后验估计 的出发点是

$$\ln f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) \Rightarrow \max$$

考虑到贝叶斯公式 $f_{x|z}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) = \frac{f_{z|x}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x})f_x(\boldsymbol{x})}{f_z(\boldsymbol{z})}$，如果 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x)$，而且与 $\boldsymbol{v}$ 无关，极大似然估计意指

$$J = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}R^{-1}(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}P_x^{-1}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \min$$

由 $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{x}}|_{\hat{\boldsymbol{x}}} = 0$，可得

$$-H^{\mathrm{T}}R^{-1}(\boldsymbol{z} - H\hat{\boldsymbol{x}}) + P_x^{-1}(\hat{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}) = 0$$

$$H^{\mathrm{T}}R^{-1}H\hat{\boldsymbol{x}} + P_x^{-1}\hat{\boldsymbol{x}} = P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z}$$

即

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MA} = (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1}(P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z})$$

同时可以容易验证最大后验估计的无偏性，$E\hat{\boldsymbol{x}}_{MA} = \bar{\boldsymbol{x}}$。此外

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{x}}_{MA} &= \hat{\boldsymbol{x}}_{MA} - \boldsymbol{x} \\
&= (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1}[P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z} - (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})\boldsymbol{x}] \\
&= (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1}[H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{v} - P_x^{-1}\mathring{\boldsymbol{x}}]
\end{aligned}$$

由此，可得

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{x}_{MA}} &= E\tilde{\boldsymbol{x}}_{MA}\tilde{\boldsymbol{x}}_{MA}^{\mathrm{T}} \\
&= (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1}[H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1}](H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1} \\
&= (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1}
\end{aligned}$$

总结起来，最大后验估计即为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{MA} = P_{\tilde{x}_{MA}}(P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z}) \\ P_{\tilde{x}_{MA}} = (H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P_x^{-1})^{-1} \end{cases} \tag{85}$$

当无先验信息时，$P_x^{-1} = 0$。可见，此时**最大后验估计与最小二乘估计、极大似然估计都是一致的**。

5.4 最小方差估计

对于线性量测系统 (82)，最小方差估计即为线性最小方差估计。假设 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x)$，且与 $\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R)$ 无关。因为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{MV} = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xz}P_z^{-1}(\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})$，注意到

$$\bar{\boldsymbol{z}} = H\bar{\boldsymbol{x}}$$

$$P_z = E\mathring{\boldsymbol{z}}\mathring{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} = E(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = HP_xH^{\mathrm{T}} + R$$

$$P_{xz} = E\mathring{\boldsymbol{x}}\mathring{\boldsymbol{z}}^{\mathrm{T}} = E\mathring{\boldsymbol{x}}(H\mathring{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}} = P_xH^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV} = \bar{\boldsymbol{x}} + P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}(\boldsymbol{z} - H\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{86}$$

$$P_{\tilde{x}_{MV}} = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} = P_x - P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}HP_x \tag{87}$$

应用矩阵求逆引理，式（87）可化为

$$P_{\tilde{x}_{MV}} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1} \tag{88}$$

另外，式 (86) 可以化为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV} = [I - P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}H]\bar{\boldsymbol{x}} + P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}\boldsymbol{z}$$

注意到

$$\begin{cases} [I - P_x H^{\mathrm{T}} = (HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}H] \\ = [P_x - P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1}HP_x]P_x^{-1} \\ = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}P_x^{-1} \\ P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1} \\ = (**)^{-1}\underbrace{(P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)}_{**}P_xH^{\mathrm{T}}(HP_xH^{\mathrm{T}} + R)^{-1} \\ = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}H^{\mathrm{T}}R^{-1} \end{cases}$$

因此，有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{MV} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}H)^{-1}(P_x^{-1}\bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{z}) = \hat{\boldsymbol{x}}_{MA} \tag{89}$$

上述讨论表明，对于系统 (82)，最小方差估计与最大后验估计是一致的。

5.5 融合估计

下面基于上面介绍的理论基础，讨论融合估计的思想和方法。对于未知的 $\boldsymbol{x}$，设独立地获得了两个估计：$(\hat{\boldsymbol{x}}_1, P_1)$ 和 $(\hat{\boldsymbol{x}}_2, P_2)$。可以认为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_1 \sim \mathcal{N}(0, P_1) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{v}_2 \sim \mathcal{N}(0, P_2) \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$$

引入符号

$$\mathcal{H}=\begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix}, \mathcal{V}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}, E\mathcal{V}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E\mathcal{V}\mathcal{V}^{\mathrm{T}} \triangleq \mathcal{R}=\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

注意到

$$\mathcal{H}^{\mathrm{T}}\mathcal{R}^{-1}=[I_n, I_n]\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix}=[P_1^{-1}, P_2^{-1}],$$

$$\mathcal{H}^{\mathrm{T}}\mathcal{R}^{-1}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix}=P_1^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1+P_2^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_2, (\mathcal{H}^{\mathrm{T}}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{H})^{-1}=(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1}$$

由最小二乘估计可知

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (P_1^{-1} + P_2^{-1})^{-1}(P_1^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + P_2^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_2)$$
$$P = E(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} = (P_1^{-1} + P_2^{-1})^{-1}$$

上述结论可以总结为如下定理。

Theorem 5.1 *如果对于 $\boldsymbol{x}$ 有两个独立的最优估计 $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, P_1)$ 和 $(\hat{\boldsymbol{x}}_2, P_2)$，那么融合后的最优估计为*

$$\begin{cases} P^{-1} = P_1^{-1} + P_2^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}} = P(P_1^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + P_2^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_2) \end{cases} \tag{90}$$

Example 5.1 已知 $(\hat{x}_1 = 1, P_1 = 0.1)$，$(\hat{x}_2 = 2, P_2 = 0.5)$，求融合估计 $\hat{x}$。

Solution 5.1 因为 $P^{-1} = P_1^{-1} + P_2^{-1} = 10 + 2 = 12$，所以

$$\hat{x} = P(P_1^{-1}(\hat{x}_1 + P_2^{-1}\hat{x}_2) = \frac{1}{12}(10\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2) = \frac{10}{12} + \frac{4}{12} = \frac{14}{12} \approx 1.167$$

$$P = \frac{1}{12} \approx 0.083$$

Theorem 5.2 (最优融合估计) 如果对于 $\boldsymbol{x}$ 有 N 个相互独立的最优估计 $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, P_1)$, $(\hat{\boldsymbol{x}}_2, P_2)$, $\cdots$, $(\hat{\boldsymbol{x}}_N, P_N)$ 。那么，融合后的最优估计为

$$\begin{cases} P^{-1} = \sum_{i=1}^{N} P_i^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}} = P \sum_{i=1}^{N} P_i^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_i \end{cases} \tag{91}$$

算法 (91) 是集中式融合算法。可以容易地建立如下序贯式融合算法：

$$\begin{cases} P_{(k+1)}^{-1} = P_{(k)}^{-1} + P_{k+1}^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{(k+1)} = P_{(k+1)}[P_{(k)}^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{(k)} + P_{k+1}^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}] \end{cases} \tag{92}$$

在上述序贯式融合算法中，$(\hat{\boldsymbol{x}}_{(k)}, P_{(k)}^{-1})$ 表示前 k 个传感器的融合估计结果，$(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}, P_{k+1}^{-1})$ 表示第 $k+1$ 个传感器的最优估计，$(\hat{\boldsymbol{x}}_{(k+1)}, P_{(k+1)}^{-1})$ 表示 $k+1$ 个传感器的融合估计结果。

5.6 融合估计的最优性

对于估计问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R) \\ \boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x) \end{cases}$$

可以看作

$$\begin{cases} \boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R) \\ \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon}, & \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(0, P_x) \end{cases}$$

可见，融合估计对应的优化问题为

$$J = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} R^{-1} (\boldsymbol{z} - H\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}} P_x^{-1} (\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}) \Rightarrow \min$$

显然，这与最大后验估计是一致的。

5.7 融合估计的等价解算方法

对于未知的 $\boldsymbol{x}$，基于两个独立估计 $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, P_1)$ 和 $(\hat{\boldsymbol{x}}_2, P_2)$ 的综合估计假设为

$$\hat{\boldsymbol{x}} = K_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + K_2\hat{\boldsymbol{x}}_2$$

式中，K_1, K_2 是两个待定系数矩阵。根据估计的无偏性要求，可知 $K_1 + K_2 = I$。记 $K_1 = K$，那么 $K_2 = I - K$。因此 $\hat{\boldsymbol{x}} = K\hat{\boldsymbol{x}}_1 + (I - K)\hat{\boldsymbol{x}}_2$，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} = K\tilde{\boldsymbol{x}}_1 + (I - K)\tilde{\boldsymbol{x}}_2$。由此可得估计误差指标函数

$$J = E\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2 = \mathrm{tr}(E\tilde{\boldsymbol{x}}\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}[KP_1K^{\mathrm{T}} + (I - K)P(I - K)^{\mathrm{T}}]$$

由 $\frac{\partial J}{\partial K}=0$，可导出 $KP_1-(I-K)P_2=0$，$K(P_1+P_2)=P_2$。因此

$$\begin{cases} K=P_2(P_1+P_2)^{-1}=(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1}P_1^{-1} \\ I-K=I-(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1}P_1^{-1}=(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1}P_2^{-1} \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}=(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1}(P_1^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1+P_2^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_2) \\ P=P_{\tilde{x}}=(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1}(P_1^{-1}+P_2^{-1})(P_1^{-1}+P_2^{-1})^{-1} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}=P(P_1^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1+P_2^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_2) \\ P^{-1}=P_1^{-1}+P_2^{-1} \end{cases} \tag{93}$$

5.8 融合估计与最小方差估计

对于参数估计问题

$$\boldsymbol{z} = H\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(0, R)$$

我们首先可以容易地获得最小二乘估计（或极大似然估计）

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_1 = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z} \\ P_1 = (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} \end{cases} \tag{94}$$

如果我们有关于 $\boldsymbol{x}$ 的先验知识，即 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}}, P_x)$，可以认为是获得了如下估计：

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_2 = \bar{\boldsymbol{x}} \\ P_2 = P_x \end{cases} \tag{95}$$

根据融合估计定理5.1，将估计（94）和（95）融合可得

$$\begin{cases} P^{-1} = P_x^{-1} + (H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}} = P(P_x^{-1} \bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z}) \end{cases} \tag{96}$$

注意到最小方差估计（88）、（89），即

$$\begin{cases} P_{\tilde{x}_{MV}} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{MV} = (P_x^{-1} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} H)^{-1} (P_x^{-1} \bar{\boldsymbol{x}} + H^{\mathrm{T}} R^{-1} \boldsymbol{z}) \end{cases} \tag{97}$$

比较（96）和（97），不难发现两者是一致的，这进一步说明了上面介绍的融合估计算法的最优性。

5.9 递推最小二乘估计

假设 k 时刻已经获得了估计 $(\hat{\boldsymbol{x}}_k, P_k)$。由 $k+1$ 时刻的量测

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = H_{k+1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}_{k+1}$$

可以获得一个附加的估计（最小二乘估计）

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_a = (H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} H_{k+1})^{-1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} \boldsymbol{z}_{k+1} \\ P_a = (H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} H_{k+1})^{-1} \end{cases}$$

对以上关于未知量 $\boldsymbol{x}$ 的两个估计进行融合，可得

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = P_{k+1}(P_k^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_k + P_a^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_a) \\ P_{k+1} = (P_k^{-1} + P_a^{-1})^{-1} \end{cases}$$

因而有

$$P_{k+1} = (P_k^{-1} + H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} H_{k+1})^{-1} \tag{98}$$

同时

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} &= P_{k+1}[(P_k^{-1} + P_a^{-1})\hat{\boldsymbol{x}}_k + P_a^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_a - P_a^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_k] \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}_k + P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} \boldsymbol{z}_{k+1} - P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} H_{k+1} \hat{\boldsymbol{x}}_k\end{aligned}$$

即

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_k + P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} (\boldsymbol{z}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k) \tag{99}$$

式 (98) 和 (99) 便构成了递推最小二乘估计，即

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_k + P_{k+1} H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} (\boldsymbol{z}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k) \\ P_{k+1} = (P_k^{-1} + H_{k+1}^{\mathrm{T}} w_{k+1} H_{k+1})^{-1}\end{cases} \tag{100}$$

Questions?