



最优滤波与平滑算法

蔡远利 教授
西安交通大学自动化学院

0. Outline

- 1 离散时间随机系统基本分析 / 2
- 2 状态估计基本引理 / 9
- 3 卡尔曼滤波算法 / 16
- 4 相关噪声与成形滤波器 / 39
- 5 卡尔曼滤波器性能分析 / 57
- 6 最优平滑算法 / 73
- 7 本章小结 / 115

1. 离散时间随机系统基本分析

一般地，我们可以将离散时间随机系统描述为

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 表示系统 k 时刻的状态， $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ 表示系统 k 时刻的确定性输入系统（控制信号）， $\mathbf{y}_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_y}$ 表示系统 $k+1$ 时刻的量测信号。此外， $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ 称为系统的**过程噪声**，有时又称为**模型噪声**； $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_y}$ 称为系统的**量测噪声**。

假设过程噪声为均值为零的高斯不相关噪声序列（高斯白噪声），即

$$E[\mathbf{w}_k] = 0$$

$$\text{cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j] = Q_k \delta_{kj}, \quad Q_k \geq 0$$

同时也假设量测噪声是均值为零的高斯不相关噪声序列（高斯白噪声），即

$$E[\mathbf{v}_k] = 0$$

$$\text{cov}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j] = R_k \delta_{kj}, \quad R_k > 0$$

对于系统的初始状态 \mathbf{x}_0 ，也假设是高斯分布的随机矢量，即 $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, P_0)$ ，可描述为

$$E\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0 \tag{3}$$

$$\text{cov}[\mathbf{x}_0] = P_0 \tag{4}$$

进一步地，假设系统的过程噪声与量测噪声互不相关、初始状态与过程噪声及量测噪声也不相关，即

$$\text{cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{j+1}] = 0, \quad \forall k, j \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{cov}[\mathbf{w}_k, \mathbf{x}_0] = 0, \quad \forall k \geq 0 \quad (6)$$

$$\text{cov}[\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{x}_0] = 0, \quad \forall k \geq 0 \quad (7)$$

在上述系统模型及基本假设下，我们首先可以进行一些基本分析。考虑到（为书写方便，暂时认为 $\mathbf{u}_k = 0$ ）

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= F_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + G_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ &= F_{k-1}(F_{k-2}\mathbf{x}_{k-2} + G_{k-2}\mathbf{w}_{k-2}) + G_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ &= F_{k-1}F_{k-2}(F_{k-3}\mathbf{x}_{k-3} + G_{k-3}\mathbf{w}_{k-3}) + F_{k-1}G_{k-2}\mathbf{w}_{k-2} + G_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} \\ &\vdots \\ &= F_{k,0}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^k F_{k,i}G_{i-1}\mathbf{w}_{i-1}\end{aligned}$$

其中， $F_{k,i} = F_{k-1}F_{k-2}\cdots F_i (k > i)$ ， $F_{k,k-1} = F_{k-1}$ ， $F_{k,k} = I (\forall k \geq 0)$ 。而

$$\mathbf{y}_k = H_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

由此可知, $\forall k$, \mathbf{x}_k 与 \mathbf{y}_k 也是高斯随机矢量。而且

$$E \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{w}_j \rangle = 0, \quad k \leq j \quad (8)$$

$$E \langle \mathbf{y}_k, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \quad k < j \quad (9)$$

式 (1) 左右两端取数学期望, 可导出系统状态均值的传播方程为

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k \bar{\mathbf{x}}_k + B_k \mathbf{u}_k, \quad \bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{m}_0 \quad (10)$$

同时可知

$$\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k [\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k] + G_k [\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{w}}_k]$$

因此

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E[\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}][\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}]^T \\ &= F_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ &\quad + F_k \overline{[\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k][\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{w}}_k]^T} G_k^T \\ &\quad + G_k \overline{[\mathbf{w}_k - \bar{\mathbf{w}}_k][\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k]^T} F_k^T \end{aligned}$$

考虑到 (8), 可导出状态方差矩阵传播方程为

$$P_{k+1} = F_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (11)$$

如果记

$$P_{k,j} = \text{cov}[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j]$$

当 $k \geq j$ 时, 有

$$\mathbf{x}_k = F_{k,j} \mathbf{x}_j + \sum_{i=j+1}^k F_{k,i} G_{i-1} \mathbf{w}_{i-1}$$

进而可知

$$\bar{\mathbf{x}}_k = F_{k,j} \bar{\mathbf{x}}_j$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = F_{k,j} \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=j+1}^k F_{k,i} G_{i-1} \mathbf{w}_{i-1}$$

$$P_{k,j} = E \hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_j^T = F_{k,j} E \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_j^T = F_{k,j} P_{j,j} = F_{k,j} P_j$$

因此, 可以导出

$$P_{k,j} = \begin{cases} F_{k,j} P_j, & k \geq j; \\ P_k F_{j,k}^T, & k < j. \end{cases} \quad (12)$$

2. 状态估计基本引理

为了解决随机动态系统的状态估计问题，根据第三章介绍的静态估计理论，我们不难建立下述四个结论。

Lemma 2.1 基于量测序列 $\mathbf{Y}_1^j \triangleq [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_j^T]^T$ 对状态 \mathbf{x}_k 的最小方差估计为条件均值

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|j} = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_1^j]$$

此外，该估计是无偏的。

Lemma 2.2 若待估计量 x_k (简记为 x) 与量测序列 Y_1^j (简记为 y) 的联合分布是高斯的, 那么

$$E(x|y) = \hat{x} = \bar{x} + P_{xy}P_y^{-1}(y - \bar{y})$$

式中, $P_{xy} = \text{cov}(x, y)$, $P_y = \text{var}(y)$ 。

Remark 2.1 在上述引理中, 如果没有高斯分布假设条件, 我们有 (线性最小方差估计)

$$\hat{x}_L = \bar{x} + P_{xy}P_y^{-1}(y - \bar{y})$$

Lemma 2.3 若对估计量 x 有两组相互独立的量测 y 与 z , 而且 (x, y, z) 的联合分布是高斯的, 那么

$$\hat{x} = E(x|y, z) = E(x|y) + E(x|z) - \bar{x}$$

Remark 2.2 对于线性最小方差估计, 我们有类似结论

$$\hat{x}_L(y, z) = \hat{x}_L(y) + \hat{x}_L(z) - \bar{x}$$

Lemma 2.4 在上述引理2.3中, 若量测 \mathbf{y} 与 z 相关, 那么

$$\hat{\mathbf{x}} = E(\mathbf{x}|\mathbf{y}, z) = E(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \tilde{z}) = E(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + E(\mathbf{x}|\tilde{z}) - \bar{\mathbf{x}}$$

其中

$$\tilde{z} = z - E(z|\mathbf{y}) = z - \bar{z} - P_{zy}P_y^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})$$

而且 $E\tilde{z} = 0, \text{cov}(\tilde{z}, \mathbf{y}) = 0$ 。

Remark 2.3 对于线性最小方差估计, 无需高斯分布假设, 类似地有

$$\hat{\mathbf{x}}_L(\mathbf{y}, z) = \hat{\mathbf{x}}_L(\mathbf{y}, \tilde{z}) = \hat{\mathbf{x}}_L(\mathbf{y}) + \hat{\mathbf{x}}_L(\tilde{z}) - \bar{\mathbf{x}}$$

Proof 2.1 (引理 2.4证明) 记

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} - P_{xy}P_y^{-1}[\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}] - P_{x\tilde{z}}P_{\tilde{z}}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}$$

那么

$$\begin{cases} E\mathbf{v} = 0 \\ \text{cov}[\mathbf{v}, \mathbf{y}] = P_{xy} - P_{xy}P_y^{-1}P_y - P_{x\tilde{z}}P_{\tilde{z}}^{-1}P_{\tilde{z}y} = 0 \\ \text{cov}[\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{z}}] = P_{x\tilde{z}} - P_{xy}P_y^{-1}P_{y\tilde{z}} - P_{x\tilde{z}}P_{\tilde{z}}^{-1}P_{\tilde{z}} = 0 \end{cases}$$

由此可知 $\{\mathbf{v}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{z}}\}$ 三者是相互独立的高斯型随机量，现进行如下变换

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{x}} + P_{xy}P_y^{-1}[\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}] + P_{x\tilde{z}}P_{\tilde{z}}^{-1}\tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + P_{zy}P_y^{-1}[\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}] + \tilde{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y} \end{cases}$$

因此

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{y}) \left| \frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{y})} \right| = f(\mathbf{v})f(\tilde{\mathbf{z}})f(\mathbf{y})$$

其中

$$\left| \frac{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{y})} \right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{v}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tilde{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & P_{x\tilde{z}}P_{\tilde{z}}^{-1} & P_{xy}P_y^{-1} \\ 0 & I & P_{zy}P_y^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = 1$$

于是有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{z}, \mathbf{y})} = \frac{f(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{y})}{f(\mathbf{z}, \mathbf{y})} = \frac{f(\mathbf{v})f(\tilde{\mathbf{z}})}{f(\mathbf{z}|\mathbf{y})} \\ &= f(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |P_v|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T P_v^{-1} \mathbf{v}\right] \end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} - P_{xy}P_y^{-1}[\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}] - P_{xz}P_z^{-1}\tilde{\boldsymbol{z}}$ 。

从而可知

$$\hat{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}] = \bar{\boldsymbol{x}} + P_{xy}P_y^{-1}[\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}}] + P_{xz}P_z^{-1}\tilde{\boldsymbol{z}}$$

$$\text{即 } \hat{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}] + E[\boldsymbol{x}|\tilde{\boldsymbol{z}}] - \bar{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}, \tilde{\boldsymbol{z}}]。$$

3. 卡尔曼滤波算法

一般状态最优估计问题可以描述为

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|k} = E[\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k] = E[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_1^k]$$

根据 t 与 k 的关系, 可将状态估计分为三类子问题:

- (1) $t < k$: 平滑;
- (2) $t = k$: 滤波;
- (3) $t > k$: 预测。

3.1 一步预测

所谓一步预测，又称为时间修正 (Time Updating)，指根据系统模型的知识对下一步状态的估计进行推断。根据引理2.1 可知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = E[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^k] = E[F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k | \mathbf{Y}_1^k]$$

由此可导出

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + B_k \mathbf{u}_k \quad (13)$$

$$P_{k+1|k} = E\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (14)$$

以上两式表明，只要知道 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和 $P_{k|k}$ ，便可求出 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ 和 $P_{k+1|k}$ 。

根据历史量测数据，也可以对下一步可能的量测值进行预测。由此产生的预测误差非常重要，称为新息 (innovation, new information)，定义为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \mathbf{y}_{k+1} - E[\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^k] = \mathbf{y}_{k+1} - E[H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^k] \\ &= \mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = H_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1}\end{aligned}\quad (15)$$

$$P_{\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}} = H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}\quad (16)$$

不难发现

$$\begin{cases} E\tilde{\mathbf{y}}_k = 0, & \forall k > 0; \\ E\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_j^T = 0, & \forall k \neq j > 0. \end{cases}$$

上述分析表明，新息序列 $\{\tilde{\mathbf{y}}_k\}$ 是均值为零的高斯独立随机序列。这是一个非常有趣的结论，是许多自适应滤波的出发点。

3.2 量测修正

在一步预测的基础上，引入新的量测数据对估计值进行修正就完成了本时间步的状态估计，该步骤称为量测修正 (Measurement Updating)。根据引理2.1 和引理2.4，可知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = E[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^{k+1}] = E[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^k, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}]$$

显然 $\langle \mathbf{Y}_1^k, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \rangle = 0$ ，再由引理2.3可知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \underbrace{\text{COV}[\mathbf{x}_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}] \text{var}^{-1}[\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}]}_{K_{k+1}} [\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - E\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}]$$

量测修正形式上简化为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1} \underbrace{[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]}_{\text{new information}} \quad (17)$$

其中, K_{k+1} 称为卡尔曼滤波增益 (Kalman Gain)。即

$$K_{k+1} = \text{cov}[\mathbf{x}_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}] \text{var}^{-1}[\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}]$$

注意到

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{x}_{k+1}, \tilde{\mathbf{y}}_{k+1}] &= E[\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}]\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}^T \\ &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} - \bar{\mathbf{x}}_{k+1}][H_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1}]^T \\ &= P_{k+1|k}H_{k+1}^T \\ \text{var}[\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}] &= H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1} \end{aligned}$$

最后可得

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \quad (18)$$

为了下一步的递推估计，我们还需要 $k+1$ 时刻的估计误差协方差，也称为滤波方差或协方差 (Filtering Covariance)。对于状态维数高于 1 的系统，这里所谓的滤波协方差当然指协方差矩阵。

注意到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} \\ &= \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - K_{k+1} [H_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1}] \\ &= [I - K_{k+1} H_{k+1}] \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - K_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} \end{aligned}$$

可导出

$$\begin{aligned}
 P_{k+1|k+1} &= \frac{[I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1|k}[I - K_{k+1}H_{k+1}]^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T}{1} \\
 &= [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1|k} - P_{k+1|k}H_{k+1}^T K_{k+1}^T \\
 &\quad + \underbrace{K_{k+1}H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T K_{k+1}^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T}_{=0} \\
 &= [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1|k} - P_{k+1|k}H_{k+1}^T K_{k+1}^T \\
 &\quad + \underbrace{K_{k+1}[H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}]K_{k+1}^T}_{=0} \\
 &= [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1|k} - \underbrace{P_{k+1|k}H_{k+1}^T K_{k+1}^T + P_{k+1|k}H_{k+1}^T K_{k+1}^T}_{=0}
 \end{aligned}$$

因此

$$P_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1|k} \quad (19)$$

3.3 初始化

上面推导了由 $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, P_{k|k})$ 到 $(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1})$ 的递推算法。考虑到

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}] &= E[\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}] \\ &= F_k E\mathbf{x}_k - E\{\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]\} \\ &= F_k E\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} - K_{k+1}H_{k+1}F_k E\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} \end{aligned}$$

可以发现，为了保证状态估计的无偏性，要求

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{m}_0 \quad (20)$$

$$P_{0|0} = \text{var}[\mathbf{x}_0] = P_0 \quad (21)$$

以上两式便构成了递推滤波算法的初始化步骤 (Initial Filtering)。

3.4 卡尔曼滤波器

除了表1 表达形式外，最优滤波算法还有其他等价形式。对于量测修正公式 (17)，可以整理为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1}H_{k+1}]\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1}\mathbf{y}_{k+1}$$

应用第二章中介绍的矩阵求逆引理，可将卡尔曼滤波增益 (18) 改写为

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{k+1|k}H_{k+1}^T[H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \\ &= [P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^TR_{k+1}^{-1}H_{k+1}]^{-1}H_{k+1}^TR_{k+1}^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

Table 1: 卡尔曼滤波算法

系统方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k$ $\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$
初始化	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = E\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0$ $P_{0 0} = \text{var}[\mathbf{x}_0] = P_0$
时间修正	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k k} + B_k \mathbf{u}_k$ $P_{k+1 k} = F_k P_{k k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T$
滤波增益	$K_{k+1} = P_{k+1 k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1 k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$
量测修正	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}]$ $P_{k+1 k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1 k}$

此外

$$\begin{aligned}
 I - K_{k+1}H_{k+1} &= [P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}]^{-1} \\
 &\quad \cdot \underbrace{\{[P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}] - H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}\}}_{=0} \\
 &= [P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}]^{-1} P_{k+1|k}^{-1} \\
 P_{k+1|k+1} &= [I - K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1|k} = [P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}]^{-1}
 \end{aligned}$$

由上式及 (22) 式可得

$$P_{k+1|k+1} = [P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}]^{-1} \quad (23)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \quad (24)$$

由此我们可以建立卡尔曼滤波算法的另外一种等价形式，见表2。

Table 2: 卡尔曼滤波算法 II

系统方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k$ $\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$
初始化	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = E\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0$ $P_{0 0} = \text{var}[\mathbf{x}_0] = P_0$
时间修正	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k k} + B_k \mathbf{u}_k$ $P_{k+1 k} = F_k P_{k k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T$
量测修正	$P_{k+1 k+1} = [P_{k+1 k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}]^{-1}$ $K_{k+1} = P_{k+1 k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}]$

Example 3.1 考虑如下标量线性定常系统

$$x_{k+1} = ax_k + w_k$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}$$

其中, a 为常数; $\{w_k\}$ 及 $\{v_k\}$ 均为零均值白噪声序列, 与 x_0 不相关, 而且

$$Ew_k w_j = q\delta_{kj}, \quad Ev_k v_j = r\delta_{kj}$$

求 $\hat{x}_{k|k}$ 的递推计算方程。

Solution 3.1 本问题中, $F_k = a, G_k = 1, u_k = 0$, 因此卡尔曼滤波方程如下

$$(0) \hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0, P_{0|0} = P_0;$$

$$(1) \hat{x}_{k+1|k} = a\hat{x}_{k|k};$$

$$(2) P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T = a^2 P_{k|k} + q;$$

$$(3) K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} = P_{k+1|k} (P_{k+1|k} + r)^{-1} = \frac{P_{k+1|k}}{P_{k+1|k} + r};$$

$$(4) \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} [y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}] = (1 - K_{k+1}) \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} y_{k+1};$$

$$(5) P_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k} = (1 - K_{k+1}) P_{k+1|k} = \frac{r P_{k+1|k}}{P_{k+1|k} + r} = r K_{k+1}.$$

根据上述结果，我们可以进行如下简单讨论：

♡ 当 $r = 0$, $K_{k+1} = 1$, $P_{k+1|k+1} = 0$, $\hat{x}_{k+1|k+1} = y_{k+1}$, 说明量测是完备的；

♡ 当 $r \rightarrow +\infty$, $K_{k+1} = 0$, $P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k}$, $\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k}$, 说明量测没有带来任何信息；

♡ 一般情况地, $0 < K_{k+1} < 1$, $P_{k+1|k+1} < P_{k+1|k}$, $P_{k+1|k+1} < r$, 说明滤波精度高于预测精度, 滤波精度受限于量测精度；

♡ 不稳定的系统 ($a > 1$) 和建模不确定性 ($q > 0$) 不利于预报, 间接影响滤波性能。

Example 3.2 如图1所示, 设飞行目标沿视线向雷达作匀加速度 ($a = 1\text{m/s}^2$) 运动, 雷达每一个周期 ($T = 1\text{s}$) 测量一次目标相对距离。根据测量数据 (表3), 求飞行目标相对雷达的距离及相对速度的递推估计。

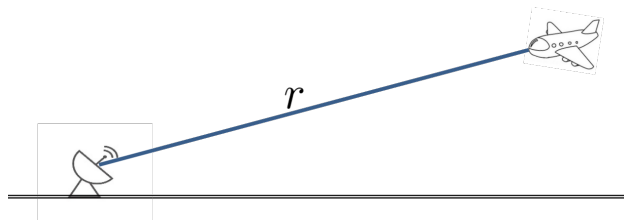


Figure 1: 雷达距离测量示意图

Solution 3.2 设目标与雷达的相对距离为 r , 那么

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -a$$

令 $x_1 = r, x_2 = \dot{r}$, 上述运动方程可以表示为状态方程形式

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a$$

写成向量方程形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u = a$$

容易求出系统的转移矩阵为

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \begin{bmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取采样周期 $T = t_{k+1} - t_k = 1s$ 进行离散化, 可导出

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k u_k$$

其中

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} r_k \\ \dot{r}_k \end{bmatrix}, \quad F_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_k = a$$

由于雷达直接测量相对距离，因此量测方程为

$$y_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + v_{k+1}$$

其中, $H_{k+1} = [1, 0]$ 。

进一步假设

$$E v_k = 0, \quad E v_k^2 = R_k = 1, \quad \hat{\mathbf{x}}_{0|0} = E \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 95 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_{0|0} = P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Table 3: 目标实际飞行数据及测量数据

k	0	1	2	3	4	5	6
r_k	100.0	99.5	98.0	95.5	92.0	87.5	82.0
\dot{r}_k	0.0	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0	-5.0	-6.0
y_k		100.0	97.8	94.4	92.7	87.3	82.1

按 $a = 1\text{m/s}^2$, 真实的初始距离和速度分别取为 $r_0 = 100\text{m}$, $\dot{r}_0 = 0\text{m/s}$, 可计算出目标不同时刻的距离和速度, 见表3。其中, y_k 表示雷达实际测量值。

根据卡尔曼滤波算法1, 可递推估计出目标相对雷达的距离和速度, 见表4。其中还给出了对应的滤波协方差。下面给出 $\hat{x}_{1|1}$ 计算过程。

Table 4: 目标距离及速度滤波数据

k	0	1	2	3	4	5	6
\hat{r}_k	95.0	99.6	98.4	95.3	92.6	87.9	82.4
$\hat{\dot{r}}_k$	1.0	0.36	-1.2	-2.3	-3.25	-4.6	-5.7
$P_{11}(k k)$	10.0	0.88	0.66	0.66	0.62	0.56	0.50
$P_{22}(k k)$	1.0	0.92	0.57	0.30	0.16	0.10	0.06

(1) 一步预测

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{1|0} = F_0 \hat{\boldsymbol{x}}_{0|0} + B_0 u_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 95 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 一步预测协方差 ($Q_k = 0, \forall k \geq 0$)

$$P_{1|0} = F_0 P_{0|0} F_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 卡尔曼滤波增益

$$\begin{aligned} K_1 &= P_{1|0} H_1^T (H_1 P_{1|0} H_1^T + R_1)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left([1, 0] \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 11/12 \\ 1/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.92 \\ 0.08 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 量测修正

$$\hat{\mathbf{x}}_{1|1} = \hat{\mathbf{x}}_{1|0} + K_1 (\mathbf{y}_1 - H_1 \hat{\mathbf{x}}_{1|0}) = \begin{bmatrix} 95.5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.92 \\ 0.08 \end{bmatrix} (100.0 - 95.5) = \begin{bmatrix} 99.64 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

(5) 滤波协方差

$$\begin{aligned}
 P_{1|1} &= (I - K_1 H_1) P_{1|0} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.92 \\ 0.08 \end{bmatrix} [1, 0] \right) \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ -0.08 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.10 \\ 0.10 & 0.92 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Remark 3.1 在实际应用中，在考察 $\hat{x}_{k|k,i} \sim k$ 变化时，同时考察对应的 $\pm 3\sqrt{P_{k|k,ii}} \sim k$ 变化，对于把握状态滤波具有重要的直观意义。

4. 相关噪声与成形滤波器

在标准卡尔曼滤波算法中，假设过程噪声、量测噪声都是不相关的随机序列，而且认为两者也是互不相关的。在实际工程应用中，可能存在如下三种可能的情况：

- (1) 过程噪声与量测噪声互相关；
- (2) 过程噪声是有色噪声；
- (3) 量测噪声是有色噪声。

此时，需要对标准卡尔曼滤波算法进行必要的改造。

4.1 过程噪声与量测噪声互相关

仍然考察状态方程 (1) 和量测方程 (2) 构成的系统, 过程噪声与量测噪声互相关, 这里指

$$E\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^T = C_k\delta_{kj} \quad (25)$$

式中, $C_k \neq 0$ 。

有多种办法来处理这种情况, 这里介绍一种巧妙的方法——何毓琦 (Y.C. Ho) 方法。首先实施等效变换, 将状态方程化为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= F_k\mathbf{x}_k + B_k\mathbf{u}_k + G_k\mathbf{w}_k + J_k[\mathbf{y}_k - H_k\mathbf{x}_k - \mathbf{v}_k] \\ &= \underbrace{[F_k - J_kH_k]}_{F_k^*}\mathbf{x}_k + \underbrace{B_k\mathbf{u}_k + J_k\mathbf{y}_k}_{\mathbf{u}_k^*} + \underbrace{G_k\mathbf{w}_k - J_k\mathbf{v}_k}_{\mathbf{w}_k^*} \end{aligned}$$

显然 J_k 可以取任何值。但如果取 $J_k = G_k C_k R_k^{-1}$, 那么 $E\langle \mathbf{w}_k^*, \mathbf{v}_k \rangle = E\{[G_k \mathbf{w}_k - J_k \mathbf{v}_k] \mathbf{v}_k^T\} = 0$ 。于是, 我们得到如下等效系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k^* \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^* + \mathbf{w}_k^* \quad (26)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (27)$$

式中, $F_k^* = F_k - J_k H_k$, $\mathbf{u}_k^* = B_k \mathbf{u}_k + J_k \mathbf{y}_k$, $\mathbf{w}_k^* = G_k \mathbf{w}_k - J_k \mathbf{v}_k$ 。此外, $E \mathbf{w}_k^* = G_k E \mathbf{w}_k - J_k E \mathbf{v}_k = 0$, $Q_k^* = \text{var}(\mathbf{w}_k^*) = G_k Q_k G_k^T - J_k C_k^T G_k^T$, $E \mathbf{w}_k^* \mathbf{v}_k^T = 0$, $E \mathbf{w}_k^* \mathbf{x}_0^T = 0$ 。

观察等效系统 (26)、(27), 可见仅一步预测计算需要进行修正。不难发

现

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= F_k^* \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{u}_k^* & (28) \\ &= F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + B_k \mathbf{u}_k + J_k [\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{k+1|k} &= F_k^* P_{k|k} F_k^{*\text{T}} + Q_k^* & (29) \\ &= [F_k - J_k H_k] P_{k|k} [F_k - J_k H_k]^{\text{T}} + G_k Q_k G_k^{\text{T}} - J_k C_k^{\text{T}} G_k^{\text{T}}\end{aligned}$$

如预期的那样，当 $C_k = E \mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^{\text{T}} = 0$ 时，修正滤波算法退化为标准卡尔曼滤波算法。过程噪声与量测噪声互相关时的卡尔曼滤波算法汇总见表5。

Table 5: 过程噪声与量测噪声互相关情况卡尔曼滤波算法

状态方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k$
量测方程	$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$
初始化	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = E \mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0$ $P_{0 0} = \text{var}[\mathbf{x}_0] = P_0$
辅助增益	$J_k = G_k C_k R_k^{-1}$, 其中 $C_k = E \mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T$
时间修正	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k k} + B_k \mathbf{u}_k + J_k [\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k k}]$ $P_{k+1 k} = [F_k - J_k H_k] P_{k k} [F_k - J_k H_k]^T + G_k Q_k G_k^T - J_k C_k^T G_k^T$
滤波增益	$K_{k+1} = P_{k+1 k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1 k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$
量测修正	$\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}]$ $P_{k+1 k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1 k}$

上述滤波算法5可以进一步优化，部分结果可以用于下面讨论的有色量测噪声情况。将 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 带入一步预测，可得

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= F_k[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k(\mathbf{y}_k - H_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})] \\ &\quad + B_k\mathbf{u}_k + J_k\{\mathbf{y}_k - H_k[\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k(\mathbf{y}_k - H_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})]\} \\ &= F_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + B_k\mathbf{u}_k + \underbrace{(F_kK_k + J_k - J_kH_kK_k)}_{\triangleq K_k^-}(\mathbf{y}_k - H_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\end{aligned}$$

将 K_k 代入修正卡尔曼增益 K_k^- , 可得

$$\begin{aligned}
 K_k^- &= F_k K_k + J_k - J_k H_k K_k \\
 &= \{F_k P_{k|k-1} H_k^T + J_k [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k] - J_k H_k P_{k|k-1} H_k^T\} \\
 &\quad \cdot [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \\
 &= [F_k P_{k|k-1} H_k^T + J_k R_k] [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \\
 &= [F_k P_{k|k-1} H_k^T + G_k C_k] [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1}
 \end{aligned}$$

因此, 一步预测方程可以改写为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + B_k \mathbf{u}_k + K_k^- (\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (30)$$

$$K_k^- = [F_k P_{k|k-1} H_k^T + G_k C_k] [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad (31)$$

考虑到

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\ &= F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k - F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - B_k \mathbf{u}_k - K_k^- (\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\end{aligned}$$

即

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = [F_k - K_k^- H_k] \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} + G_k \mathbf{w}_k - K_k^- \mathbf{v}_k$$

一步预测方差

$$\begin{aligned}P_{k+1|k} &= E \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}^T \\ &= [F_k - K_k^- H_k] P_{k|k-1} [F_k - K_k^- H_k]^T \\ &\quad + G_k Q_k G_k^T + K_k^- R_k K_k^{-T} - G_k C_k K_k^{-T} - K_k^- C_k^T G_k^T\end{aligned}\quad (32)$$

Table 6: 噪声互相关一步预测滤波算法

系统方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k$ $\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$
初始化	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0} = E\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0, \quad P_{0 0} = \text{var}[\mathbf{x}_0] = P_0$
辅助增益	$J_k = G_k C_k R_k^{-1}, \quad \text{其中 } C_k = E\mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T$
一步预测	$K_k^- = [F_k P_{k k-1} H_k^T + G_k C_k] [H_k P_{k k-1} H_k^T + R_k]^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k k-1} + B_k \mathbf{u}_k + K_k^- (\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k k-1})$ $P_{k+1 k} = [F_k - K_k^- H_k] P_{k k-1} [F_k - K_k^- H_k]^T$ $+ G_k Q_k G_k^T + K_k^- R_k K_k^{-T} - G_k C_k K_k^{-T} - K_k^- C_k^T G_k^T$
辅助输出	$K_{k+1} = P_{k+1 k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1 k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}]$ $P_{k+1 k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1 k}$

4.2 有色过程噪声

不失一般性，不考虑控制信号的作用，此时系统模型可以描述为

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k \quad (33)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (34)$$

假设量测噪声是白噪声，即 $\mathbf{v}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, R)$; $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$; $\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ 是互不相关的。有色过程噪声是指

$$\begin{cases} E\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T = Q \geq 0 \\ E\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T \neq 0, \quad \text{for some } k \neq j \end{cases}$$

一般地，如果噪声序列 w_k 的谱密度 $\Phi_w(\omega)$ 不为常数，那么就称为有色噪声。

成形滤波器 (Shaping Filter)

根据谱分解定理，有色噪声序列一般可以看作白噪声序列通过合适的线性定常系统（成形滤波器，Shaping Filter）的输出。

假设成形滤波器的输入为白噪声 w_k^s ，那么

$$\mathbf{x}_{k+1}^s = A^s \mathbf{x}_k^s + C^s w_k^s$$

$$w_k = H^s \mathbf{x}_k^s + D^s w_k^s$$

有色噪声序列 $\{\mathbf{w}_k\}$ 的相关性质完全由成形滤波器参数 $\{A^s, C^s, H^s, D^s\}$ 确定。于是我们可得如下扩维后的等价系统

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^s \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_k & G_k H^s \\ 0 & A^s \end{bmatrix}}_{F_k^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_k^s \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k^*} + \underbrace{\begin{bmatrix} G_k D^s \\ C^s \end{bmatrix}}_{G_k^*} \mathbf{w}_k^s \quad (35)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{k+1} & 0 \end{bmatrix}}_{H_{k+1}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^s \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}^*} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (36)$$

采用 (35) 式和 (36) 式中的标注符号，可以把等价系统简写为

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = F_k^* \mathbf{x}_k^* + G_k^* \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1}^* \mathbf{x}_{k+1}^* + \mathbf{v}_{k+1}$$

- 此时可以采用标准卡尔曼滤波算法，获得扩展状态 $\mathbf{x}_k^* = [\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^s]^T$ 的最优估计。
- 不仅可以获得系统状态的估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$ ，还同时得到了成形滤波器内部状态的估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^s$ 。
- 这种情况及其求解方法，相当于对系统重新建模，将问题转化为标准形式。

4.3 有色量测噪声

仍然考虑方程 (33) 和 (34) 描述的系统, 进一步地

- 假设过程噪声是白噪声, 即 $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$;
- 假设 $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$, 且 $\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_k$ 互不相关;
- 假设量测噪声是有色噪声, 设为 \mathbf{n}_k , $E\mathbf{n}_k = 0$, $E\mathbf{n}_k\mathbf{n}_j^T = \mathbf{s}_{kj}$ 。并假设 \mathbf{n}_k 是成形滤波器 F_k^s 的输出, 即

$$\mathbf{n}_{k+1} = F_k^s \mathbf{n}_k + \mathbf{v}_k$$

其中 $\{\mathbf{v}_k\}$ 是高斯分布随机序列, 而且 $E\mathbf{v}_k = 0$, $E\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T = \mathbf{r}_k\delta_{kj}, \forall k, j$ 。同样地, 假设 $\{\mathbf{v}_k\}$ 与过程噪声 $\{\mathbf{w}_k\}$ 不相关。

显然，此时不能采用简单的增加状态维数的方法。为此，我们构造如下虚拟量测

$$\begin{aligned}
 z_k &= \mathbf{y}_{k+1} - F_k^s \mathbf{y}_k \\
 &= H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1} - F_k^s \mathbf{y}_k \\
 &= H_{k+1} [F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k] + \mathbf{n}_{k+1} - F_k^s [H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k] \\
 &= [H_{k+1} F_k - F_k^s H_k] \mathbf{x}_k + [H_{k+1} G_k \mathbf{w}_k + \mathbf{n}_{k+1} - F_k^s \mathbf{n}_k] \triangleq \mathcal{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^*
 \end{aligned}$$

其中， $\mathbf{v}_k^* = H_{k+1} G_k \mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k$ 。显然， \mathbf{v}_k^* 是高斯分布随机序列，且 $E \mathbf{v}_k^* = 0$ ， $E \mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_j^{*T} = [H_{k+1} G_k Q_k G_k^T H_{k+1}^T + \mathbf{r}_k] \delta_{kj}$ ， $\forall k, j$ 。但 \mathbf{v}_k^* 与 \mathbf{w}_k 是相关的，且 $E \mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^{*T} \triangleq C_k = Q_k G_k^T H_{k+1}^T$ 。

通过上述处理, 我们获得了如下等效系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k \quad (37)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathcal{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^*, \quad k \geq 0 \quad (38)$$

注意到 \mathbf{z}_k 不仅包含了 \mathbf{x}_k 的量测信息, 还包含了 \mathbf{x}_{k+1} 的量测信息。因此, 上述等效系统的一步预测值即为我们希望的滤波值。

应用过程噪声与量测噪声相关时的滤波算法6（一步预测部分），可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + K_k (\mathbf{z}_k - \mathcal{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (39)$$

$$K_k = [F_k P_{k|k} \mathcal{H}_k^T + \mathcal{H}_k C_k] [\mathcal{H}_k P_{k|k} G_k^T + R_k]^{-1} \quad (40)$$

$$P_{k+1|k+1} = [F_k - K_k \mathcal{H}_k] P_{k|k} [F_k - K_k \mathcal{H}_k]^T + G_k Q_k G_k^T + K_k R_k K_k^T - G_k C_k K_k^T - K_k C_k^T G_k^T \quad (41)$$

其中, $\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_{k+1} - F_k^s \mathbf{y}_k$, $\mathcal{H}_k = H_{k+1} F_k - F_k^s H_k$, $R_k = H_{k+1} G_k Q_k G_k^T H_{k+1}^T + \mathbf{r}_k$, $C_k = Q_k G_k^T H_{k+1}^T$ 。

上述滤波算法的初始化, 和正常的滤波算法不同, 需要另外考虑。观察 (39) 式可知, 在求估计 $\hat{\mathbf{x}}_{1|1}$ 时, 需要 \mathbf{y}_0 , 即量测是从 0 时刻开始的。因此, 我们可以利用该信息来确定初始估计。由静态估计理论 (定理 3.8) 可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \bar{\mathbf{x}}_0 + P_0 H_0^T (H_0 P_0 H_0^T + R_0)^{-1} (\mathbf{y}_0 - H_0 \bar{\mathbf{x}}_0) \quad (42)$$

$$P_{0|0} = P_0 - P_0 H_0^T (H_0 P_0 H_0^T + R_0)^{-1} H_0 P_0 \quad (43)$$

5. 卡尔曼滤波器性能分析

为了深入把握卡尔曼滤波的本质，我们从三个方面进行讨论。

5.1 一般分析

1. 在高斯分布统计特性假设下，滤波估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 是状态 \boldsymbol{x}_k 的无偏最小方差估计，而且 $P_{k|k}$ 就是 \boldsymbol{x}_k 基于量测值 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_k$ 的所有估计中最小的均方误差矩阵。
2. 卡尔曼滤波算法对非高斯假设亦适用，此时 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ 是所有线性估计中均方误差最小的无偏最优估计，但不是所有估计中的最优估计。
3. 考察卡尔曼增益公式

$$K_{k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1} R_{k+1}^{-1}$$

上式说明，通过量测信息来提升滤波精度，如果量测不准则降低对量测信息的依赖。

4. 考察状态估计协方差矩阵

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T$$
$$P_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k}$$

可见，当过程噪声 Q_k 较大时，一步预测与滤波精度都会变小。说明提高模型的精度，将有益于状态的估计。

5. 由滤波方差矩阵公式 (23) 可得

$$P_{k+1|k+1}^{-1} = P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \quad (44)$$

上式说明，大的量测噪声 R_{k+1} 将使滤波精度下降。所以，大的量测噪声与大的过程噪声对滤波都是不利的，这和我们的直观感觉是一致的。

6. 卡尔曼滤波公式算法结构为

滤波值 = 一步预测值 + 修正项。

这暗喻滤波的精度将高于预测的精度。其实，从 (44) 式也可得出

$$P_{k+1|k+1}^{-1} > P_{k+1|k}^{-1}, \quad \text{即} \quad P_{k+1|k+1} < P_{k+1|k}$$

7. 除了一步预测，可以非常容易地建立任意步的预测。不考虑确定性控制项时，即为

$$\hat{\mathbf{x}}_{N|k} = F_{N,k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \quad \forall N > k.$$

所以，以后我们不用再专门研究预测问题了。

8. 综合考虑卡尔曼滤波增益与协方差矩阵

$$\begin{cases} K_{k+1} = P_{k+1|k+1} H_{k+1} R_{k+1}^{-1} \\ P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ P_{k+1|k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k} \end{cases}$$

可见，对于给定的系统，如果事先知道 P_0 、 Q_k 、 R_k ，那么上述卡尔曼滤波增益与协方差矩阵可以“离线 (off-line)”预先计算，从而减小在线计算量。

5.2 稳定性分析

卡尔曼滤波器本质上是一个动态系统，因此可以基于李雅普诺夫稳定性理论分析滤波器误差动态的稳定性。

为了便于分析，我们考虑基于一步预测的独立递推算法。将 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k[\mathbf{y}_k - H_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]$ 代入一步预测部分，可得

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= F_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + B_k\mathbf{u}_k \\ &= F_k\{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k[\mathbf{y}_k - H_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}]\} + B_k\mathbf{u}_k \\ &= F_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + F_kK_k[\mathbf{y}_k - H_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + B_k\mathbf{u}_k\end{aligned}$$

将 $P_{k|k} = [I - K_k H_k] P_{k|k-1}$ 代入一步预测协方差, 有

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ &= F_k P_{k|k-1} F_k^T - F_k K_k H_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \end{aligned}$$

由此我们导出了基于一一步预测的滤波算法, 即

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + F_k K_k [\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + B_k \mathbf{u}_k \\ P_{k+1|k} = F_k P_{k|k-1} F_k^T - F_k K_k H_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \end{cases} \quad (45)$$

上述三个公式可以作为滤波算法单独使用，只要给出初始估计值，就可以递推求出任何时刻的状态最优估计。如果采用简化记号： $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ ， $P_{k+1|k} \triangleq P_{k+1}$ ，可以单独使用的一步预测滤波算法 (45) 形式上可简化为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_k + F_k K_k [\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k] + B_k \mathbf{u}_k \\ P_{k+1} = F_k P_k F_k^T - F_k K_k H_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ K_k = P_k H_k^T [H_k P_k H_k^T + R_k]^{-1} \end{cases} \quad (46)$$

一步预测滤波算法 (46) 反映了卡尔曼滤波器的实质，我们只需要对其进行稳定性分析即可。采用简化记号后，估计误差的动态方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k \tilde{\mathbf{x}}_k - F_k K_k [\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k] + G_k \mathbf{w}_k \\ &= F_k [I - K_k H_k] \tilde{\mathbf{x}}_k - F_k K_k \mathbf{v}_k + G_k \mathbf{w}_k \end{aligned}$$

上式后两项是（随机）输入作用，滤波算法的稳定性只需研究

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = F_k[I - K_k H_k]\tilde{\mathbf{x}}_k \quad (47)$$

取 $V(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \tilde{\mathbf{x}}_k^T P_k^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k$ ，根据李雅普诺夫稳定性理论，系统稳定性要求

$$\Delta V(\tilde{\mathbf{x}}_k) = V(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}) - V(\tilde{\mathbf{x}}_k) < 0 \quad (48)$$

即

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^T \{ [I - K_k H_k]^T F_k^T P_{k+1}^{-1} F_k [I - K_k H_k] - P_k^{-1} \} \tilde{\mathbf{x}}_k < 0$$

相当于要求

$$[I - K_k H_k]^T F_k^T P_{k+1}^{-1} F_k [I - K_k H_k] - P_k^{-1} < 0$$

如果 $F_k[I - K_k H_k]$ 可逆, 上式化为

$$P_{k+1}^{-1} - F_k^{-T}[I - K_k H_k]^{-T} P_k^{-1} [I - K_k H_k]^{-1} F_k^{-1} < 0$$

考虑到 $P_{k+1} > 0$, 那么

$$I - P_{k+1} F_k^{-T} [I - K_k H_k]^{-T} P_k^{-1} [I - K_k H_k]^{-1} F_k^{-1} < 0$$

由 (46) 第二式可知

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= F_k P_k F_k^T - F_k K_k H_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ &= F_k [I - K_k H_k] P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ &= F_k [I - K_k H_k] P_k [I - K_k H_k]^T F_k^T \\ &\quad + F_k [I - K_k H_k] P_k H_k^T K_k^T F_k^T + G_k Q_k G_k^T \end{aligned}$$

又由 (46) 第三式可知

$$K_k [H_k P_k H_k^T + R_k] = P_k H_k^T$$

因此

$$(I - K_k H_k) P_k H_k^T = P_k H_k^T - K_k H_k P_k H_k^T = K_k R_k$$

所以

$$P_{k+1} = F_k [I - K_k H_k] P_k [I - K_k H_k]^T F_k^T + F_k K_k R_k K_k^T F_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

可见, $\Delta V(\tilde{\mathbf{x}}_k) = V(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}) - V(\tilde{\mathbf{x}}_k) < 0$ 的条件转化为

$$-[F_k K_k R_k K_k^T F_k^T + G_k Q_k G_k^T] \cdot F_k^{-T} [I - K_k H_k]^{-T} P_k^{-1} [I - K_k H_k]^{-1} F_k^{-1} < 0$$

即

$$-[F_k K_k R_k K_k^T F_k^T + G_k Q_k G_k^T] < 0$$

上式表明, 当 $G_k Q_k G_k^T > 0$, 或者当 $R_k > 0, Q_k \geq 0$, 另外 $K_k \neq 0, F_k$ 可逆, 则有 $\Delta V(\tilde{\mathbf{x}}_k) < 0$ 。

关于卡尔曼滤波器稳定性的进一步讨论可参考相关文献。

5.3 稳态性能

在卡尔曼滤波器实际应用中，对于线性时不变系统，我们经常关心其稳态性能。理想情况下需要给定若干理论参数，但通常非常困难。设滤波器初始化有误差

$$\bar{\mathbf{x}}_0^* \neq \bar{\mathbf{x}}_0, \quad P_0^* \neq P_0$$

另外，噪声的统计特性也可能不准确，即

$$Q_k^* \neq Q_k, \quad R_k^* \neq R_k$$

实际计算出的滤波值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*$ 与滤波协方差矩阵 $P_{k|k}^*$ 分别称为滤波的视在值及视在协方差。而实际的协方差为

$$P_{k|k}^{**} = \text{var}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^*) = (I - K_k^* H_k) P_{k|k-1}^{**} (I - K_k^* H_k)^T$$

我们将面临三个协方差矩阵： $P_{k|k}$ 、 $P_{k|k}^*$ 和 $P_{k|k}^{**}$ 。

一般无法得到最优的 $P_{k|k}$ 与实际的 $P_{k|k}^{**}$ ，但肯定有 $P_{k|k}^{**} \geq P_{k|k}$ 。根据线性系统理论，可以建立下面关于实际获得的 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*$ 和 $P_{k|k}^*$ 的若干结论。

Theorem 5.1 渐进稳定的卡尔曼滤波器最终趋于无偏估计, 即

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^* = 0$$

Theorem 5.2 若卡尔曼滤波器是渐进稳定的, 且仅仅是初始方差矩阵有误差, 即 $P_0^* \neq P_0$, 那么

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{k|k}^* = P_{k|k}$$

Theorem 5.3 若过程噪声和量测噪声都是平稳的, 即 $Q_k = Q, R_k = R$ 。另外设所研究的系统还是定常的, 即 $F_k = F, G_k = G, H_k = H$ 。当卡尔曼滤波器是渐进稳定的时, 有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{k|k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{k|k}^* = P$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} K_{k|k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} K_{k|k}^* = K$$

Theorem 5.4 (保守滤波器) 如果 $P_0^* \geq P_0$, 且 $Q_k^* \geq Q_k, R_k^* \geq R_k, \forall k$, 那么

$$P_{k|k}^* \geq P_{k|k}^{**}$$

上述结论为卡尔曼滤波算法的实际应用提供了理论保障, 进一步的讨论及证明见教材后面参考文献。

6. 最优平滑算法

简单地讲，平滑是指利用 $(0, N]$ 区间的量测数据对 $t \in [0, N]$ 时刻动态系统的状态进行估计。不同于滤波算法，平滑估计是非实时的。平滑问题可以进一步分为三类子问题：

- (1) 固定区间平滑；
- (2) 固定点平滑；
- (3) 固定延迟平滑。

以上三类平滑问题分别具有不同的应用背景，后面两类具有建立递推算法的可能，即 N 可以不断增长。

6.1 最优平滑器的一般形式

我们仍然考虑如下线性动态系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k \quad (49)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (50)$$

其中, $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$ 与 $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ 是不相关的独立噪声序列, 它们与初始状态 $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$ 不相关。另外, 设 $Q_k \geq 0, R_k > 0$ 。

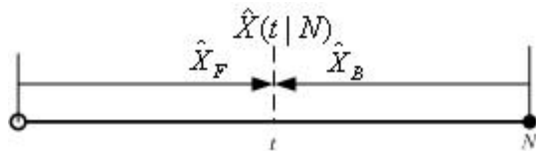


Figure 2: 最优平滑器

如图2所示，记基于量测信息 $\mathbf{y}_j (0 < j \leq t)$ 的状态最优估计为 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^F$ 、基于量测信息 $\mathbf{y}_j (t < j \leq N)$ 的状态最优估计为 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t+1}^B$ 。 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^F$ 称为前向滤波估计， $\hat{\mathbf{x}}_{t|t+1}^B$ 称为反向滤波估计（一步预测）。另外，设它们的估计误差协方差分别为 $P_t^F = P_{t|t}^F$ 和 $P_t^B = P_{t|t+1}^B$ 。

根据第三章介绍的融合估计原理，我们可以直接导出 t 时刻的最优平滑估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|N} = P_{t|N}[(P_t^F)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^F + (P_t^B)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{t|t+1}^B] \quad (51)$$

$$P_{t|N}^{-1} = (P_t^F)^{-1} + (P_t^B)^{-1} \quad (52)$$

由平滑估计误差协方差矩阵公式 (52) 可以发现，平滑估计精度总要优于滤波估计（前向滤波估计）精度。

6.2 最优固定区间平滑

为了形成完整的平滑算法，我们需要建立最优平滑估计一般公式 (51) 和 (50) 中前向滤波和反向滤波的具体计算公式。前向滤波算法部分非常简单，前面已经解决。反向滤波算法相对不太一样，需要仔细研究。

6.2.1 前向滤波器

基于量测信息 $\mathbf{y}_j (0 < j \leq t)$ 的状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^F$ ，显然就是标准卡尔曼滤波器 (表1) 的输出。所以，可以直接建立如下前向滤波器

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^F \\ P_{k+1|k}^F = F_k P_{k|k}^F F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ K_{k+1}^F = P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^F = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F + K_{k+1}^F [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F] \\ P_{k+1|k+1}^F = [I - K_{k+1}^F H_{k+1}] P_{k+1|k}^F \\ \hat{\mathbf{x}}_{0|0}^F = \bar{\mathbf{x}}_0, P_{0|0}^F = P_0 \end{array} \right. \quad (53)$$

6.2.2 反向滤波器

在反向滤波器中，起始时刻是 N ，终了时刻是 t （平滑计算时刻），平滑计算需要的最终输出是 $\hat{\mathbf{x}}_{t|t+1}^B$ 。下面为简单方便，（本小节）忽略了上标“ B ”。

类似于 (49)，我们可以将状态反向传播方程表达为

$$\mathbf{x}_k = F_{k,k+1}\mathbf{x}_{k+1} + F_{k,k+1}G_k\mathbf{w}_k \quad (54)$$

其中， $F_{k,k+1} = F_{k+1,k}^{-1} = F_k^{-1}$ （后面将会看到，这个逆不是平滑算法的必要条件）。

假设已经获得了 $(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1})$ ，由上式可以直接获得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} = F_{k,k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} \quad (55)$$

$$P_{k|k+1} = F_{k,k+1}[P_{k+1|k+1} + G_k Q_k G_k^T]F_{k,k+1}^T \quad (56)$$

反向滤波对应的量测方程和 (50) 类似, 即

$$\mathbf{y}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (57)$$

始于时刻 N , 从时刻 $N - 1$ 开始反向滤波。根据融合估计原理, 可以导出时刻 k 的反向滤波及其误差协方差矩阵如下

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = P_{k|k} [P_{k|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} \mathbf{y}_k] \quad (58)$$

$$P_{k|k}^{-1} = P_{k|k+1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (59)$$

理论上, (55)、(56)、(58) 和 (59) 已经构成我们需要的反向滤波算法。为了提高计算效率和数值稳定性, 下面引入反向滤波信息矩阵及信息加权估计等概念。

Definition 6.1 (反向滤波及预测信息矩阵)

$$S_{k|k} = P_{k|k}^{-1}$$

$$S_{k|k+1} = P_{k|k+1}^{-1}$$

由此, (56)、(59) 可以表达为

$$S_{k|k} = S_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (60)$$

$$S_{k|k+1} = F_k^T [P_{k+1|k+1} + G_k Q_k G_k^T]^{-1} F_k \quad (61)$$

根据矩阵求逆引理, 反向一步预测信息矩阵 (61) 可化为

$$S_{k|k+1} = F_k^T \{ S_{k+1|k+1} - S_{k+1|k+1} G_k [G_k^T S_{k+1|k+1} G_k + Q_k^{-1}]^{-1} G_k^T S_{k+1|k+1} \} F_k$$

定义增益矩阵

$$K_k = S_{k+1|k+1} G_k [G_k^T S_{k+1|k+1} G_k + Q_k^{-1}]^{-1} \quad (62)$$

那么，反向一步预测信息矩阵可以写为

$$S_{k|k+1} = F_k^T [I - K_k G_k^T] S_{k+1|k+1} F_k \quad (63)$$

等价地

$$\begin{aligned} S_{k|k+1} = & F_k^T [I - K_k G_k^T] S_{k+1|k+1} [I - K_k G_k^T]^T F_k \\ & + F_k^T [I - K_k G_k^T] S_{k+1|k+1} G_k K_k^T F_k \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} & [I - K_k G_k^T] S_{k+1|k+1} G_k \\ &= K_k \{ [G_k^T S_{k+1|k+1} G_k + Q_k^{-1}] [S_{k+1|k+1} G_k]^{-1} - G_k^T \} S_{k+1|k+1} G_k \\ &= K_k Q_k^{-1} \end{aligned}$$

因此

$$S_{k|k+1} = F_k^T [I - K_k G_k^T] S_{k+1|k+1} [I - K_k G_k^T]^T F_k + F_k^T K_k Q_k^{-1} K_k^T F_k \quad (64)$$

引入反向滤波信息加权估计

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k} = P_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = S_{k|k} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (65)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} = P_{k|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} = S_{k|k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} \quad (66)$$

式 (58) 化为

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k} = \hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} \mathbf{y}_k \quad (67)$$

式 (55) 化为

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} = S_{k|k+1} F_{k,k+1} S_{k+1|k+1}^{-1} \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k+1} \quad (68)$$

考虑到 (63) 及 $F_k F_{k,k+1} = F_{k+1,k} F_{k,k+1} = I$, 上式可写为

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} = F_k^T [I - K_k G_k^T] \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k+1} \quad (69)$$

从最优平滑估计的一般公式 (51) 可知, 最优平滑计算中只要知道 $(P_{k|k+1}^B)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t+1}^B$ 就可以了。所以, (69)、(64)、(67)、(60) 与 (62) 构成了我们需要的反向滤波算法。汇总起来, 固定区间平滑核心公式为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{z}}_{k|k} = \hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} \mathbf{y}_k \\ S_{k|k} = S_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \\ K_k = S_{k+1|k+1} G_k [G_k^T S_{k+1|k+1} G_k + Q_k^{-1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} = F_k^T [I - K_k G_k^T] \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k+1} \\ S_{k|k+1} = F_k^T [I - K_k G_k^T] S_{k+1|k+1} \{*\}^T + F_k^T K_k Q_k^{-1} K_k^T F_k \end{cases}$$

由于在 N 时刻, 正向滤波器和平滑器将给出同样的估计值, 即 $\hat{\mathbf{x}}_{N|N}^F = \hat{\mathbf{x}}_{N|N}$, $P_{N|N}^F = P_{N|N}$ 。所以, 反向滤波器的初值为 $S_{N|N+1} = 0$ 、 $\hat{\mathbf{z}}_{N|N+1} = 0$ 。

最优平滑算法总结于表7。结果表明，固定区间平滑算法最后并不要求 F_k 可逆。

Table 7: 最优固定期间平滑算法

状态方程与量测方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k$ $\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$ $\mathbf{w}_k \sim (0, Q_k), \quad \mathbf{v}_k \sim (0, R_k), \quad x(0) \sim (\bar{\mathbf{x}}_0, P_0),$ 三者互不相关
-----------	---

前向滤波器

$(k = 1, 2, \dots, N - 1)$

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0}^F = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad P_{0|0}^F = P_0$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^F$$

$$P_{k+1|k}^F = F_k P_{k|k}^F F_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

$$K_{k+1}^F = P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^F = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F + K_{k+1}^F [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F]$$

$$P_{k+1|k+1}^F = [I - K_{k+1}^F H_{k+1}] P_{k+1|k}^F$$

反向滤波器

 $(k = N, N - 1, \dots, 1)$

$$S_{N|N+1} = 0, \quad \hat{\mathbf{z}}_{N|N+1} = 0$$

$$S_{k|k} = S_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} H_k$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k} = \hat{\mathbf{z}}_{k|k+1} + H_k^T R_k^{-1} \mathbf{y}_k$$

$$K_{k-1} = S_{k|k} G_{k-1} [G_{k-1}^T S_{k|k} G_{k-1} + Q_{k-1}^{-1}]^{-1}$$

$$S_{k-1|k} = F_{k-1}^T [I - K_{k-1} G_{k-1}^T] S_{k|k} [**]^T F_{k-1} \\ + F_{k-1}^T K_{k-1} Q_{k-1}^{-1} K_{k-1}^T F_{k-1}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k-1|k} = F_{k-1}^T [I - K_{k-1} G_{k-1}^T] \hat{\mathbf{z}}_{k|k}$$

最优平滑器

 $(k = N, N - 1, \dots, 0)$

$$P_{k|N} = [(P_{k|k}^F)^{-1} + S_{k|k+1}]^{-1}, \quad P_{N|N} = P_{N|N}^F$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|N} = P_{k|N} [(P_{k|k}^F)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^F + \hat{\mathbf{z}}_{k|k+1}], \quad \hat{\mathbf{x}}_{N|N} = \mathbf{x}_{N|N}^F$$

6.2.3 RTS 平滑器

上述固定区间平滑算法还可以进一步简化, 从而得到所谓的劳契-邓-斯特利布尔固定期间平滑器 (Rauch-Tung-Striebel Smoother), 即 RTS 平滑器。

由固定区间最优平滑一般公式 (52) 可知

$$P_{k|N} = [(P_{k|k}^F)^{-1} + (P_{k|k+1}^B)^{-1}]^{-1} = P_{k|k}^F - P_{k|k}^F [P_{k|k}^F + P_{k|k+1}^B]^{-1} P_{k|k}^F \quad (70)$$

下面研究 $[P_{k|k}^F + P_{k|k+1}^B]^{-1}$ 的简化, 想办法将反向滤波的相关计算整合到最后的平滑计算环节。

根据反向滤波和前向滤波的信息矩阵计算公式

$$(P_{k|k}^B)^{-1} = (P_{k|k+1}^B)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (71)$$

$$(P_{k|k}^F)^{-1} = (P_{k|k-1}^F)^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k \quad (72)$$

可导出

$$P_{k|k}^B = [(P_{k|k+1}^B)^{-1} + (P_{k|k}^F)^{-1} - (P_{k|k-1}^F)^{-1}]^{-1} = [P_{k|N}^{-1} - (P_{k|k-1}^F)^{-1}]^{-1} \quad (73)$$

根据反向滤波和前向滤波协方差公式，可知

$$\begin{aligned} [P_{k|k+1}^B + P_{k|k}^F]^{-1} &= \{P_{k|k}^F + F_{k,k+1}[P_{k+1|k+1}^B + G_k Q_k G_k^T]F_{k,k+1}^T\}^{-1} \\ &= F_k^T \{F_k P_{k|k}^F F_k^T + P_{k+1|k+1}^B + G_k Q_k G_k^T\}^{-1} F_k \\ &= F_k^T \{P_{k+1|k}^F + P_{k+1|k+1}^B\}^{-1} F_k \end{aligned}$$

代入 (73), 则有

$$\begin{aligned}
 [P_{k|k+1}^B + P_{k|k}^F]^{-1} &= F_k^T \{ P_{k+1|k}^F + [P_{k+1|N}^{-1} - (P_{k+1|k}^F)^{-1}]^{-1} \}^{-1} F_k \\
 &= F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1} \{ (P_{k+1|k}^F)^{-1} \\
 &\quad + (P_{k+1|k}^F)^{-1} [P_{k+1|N}^{-1} - (P_{k+1|k}^F)^{-1}]^{-1} \\
 &\quad \cdot (P_{k+1|k}^F)^{-1} \}^{-1} (P_{k+1|k}^F)^{-1} F_k
 \end{aligned}$$

应用矩阵求逆引理, 上式可简化为

$$[P_{k|k+1}^B + P_{k|k}^F]^{-1} = F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1} [P_{k+1|k}^F - P_{k+1|N}] (P_{k+1|k}^F)^{-1} F_k$$

将上式代入公式 (70), 于是有

$$P_{k|N} = P_{k|k}^F - P_{k|k}^F F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1} [P_{k+1|k}^F - P_{k+1|N}] (***)^T \quad (74)$$

记

$$\mathcal{F}_k = P_{k|k}^F F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1} \quad (75)$$

那么 (74) 可表达为

$$P_{k|N} = P_{k|k}^F - \mathcal{F}_k [P_{k+1|k}^F - P_{k+1|N}] \mathcal{F}_k^T \quad (76)$$

上式是平滑估计的误差协方差矩阵，它仅和前向滤波器有关。同样地，我们还可以导出基于前向滤波器的平滑估计递推算法

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|N} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^F + \mathcal{F}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F) \quad (77)$$

式 (75)~(77) 与前向滤波器一起构成了劳契-邓-斯特利布尔 (RTS) 固定期间平滑器 (见表8)，其初始值为 $\hat{\mathbf{x}}_{N|N} = \hat{\mathbf{x}}_{N|N}^F, P_{N|N} = P_{N|N}^F$ 。

RTS 固定期间平滑算法 (表8) 比前面建立的固定区间平滑算法 (表7) 计算效率要高差不多 $1/3$ 。

Table 8: RTS 固定期间平滑算法

状态方程与量测方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k$ $\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$ $\mathbf{w}_k \sim (0, Q_k), \quad \mathbf{v}_k \sim (0, R_k), \quad x(0) \sim (\bar{\mathbf{x}}_0, P_0),$ <p>三者互不相关</p>
-----------	--

<p>前向滤波器</p> <p>$(k = 1, 2, \dots, N - 1)$</p>	$\hat{\mathbf{x}}_{0 0}^F = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad P_{0 0}^F = P_0$ $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}^F = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k k}^F$ $P_{k+1 k}^F = F_k P_{k k}^F F_k^T + G_k Q_k G_k^T$ $K_{k+1}^F = P_{k+1 k}^F H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1 k}^F H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1}^F = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}^F + K_{k+1}^F [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}^F]$ $P_{k+1 k+1}^F = [I - K_{k+1}^F H_{k+1}] P_{k+1 k}^F$
<p>RTS 最优平滑器</p> <p>$(k = N, N - 1, \dots, 0)$</p>	$\hat{\mathbf{x}}_{N N} = \hat{\mathbf{x}}_{N N}^F, \quad P_{N N} = P_{N N}^F$ $\mathcal{F}_k = P_{k k}^F F_k^T (P_{k+1 k}^F)^{-1}$ $P_{k N} = P_{k k}^F - \mathcal{F}_k [P_{k+1 k}^F - P_{k+1 N}] \mathcal{F}_k^T$ $\hat{\mathbf{x}}_{k N} = \hat{\mathbf{x}}_{k k}^F + \mathcal{F}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k+1 N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k}^F)$

6.3 最优固定点平滑

这里介绍两套固定点平滑算法，算法 A 基于状态扩维的思想，算法 B 基于固定区间 RTS 算法。

6.3.1 固定点平滑算法 A

考虑如下离散时间随机系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k \quad (78)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (79)$$

其中, $\mathbf{w}_k \sim (0, Q_k)$ 与 $\mathbf{v}_k \sim (0, R_k)$ 是相互独立的不相关噪声, 它们与初始状态 $x(0) \sim (\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$ 不相关。另外, 设 $Q_k \geq 0, R_k > 0$ 。固定点平滑就是求 $\hat{\mathbf{x}}_{j|k} (k \geq j)$, 其中 j 是一固定值。

增加一个新的状态向量 \mathbf{x}_k^A , 它的递推方程为

$$\mathbf{x}_{k+1}^A = \mathbf{x}_k^A, \quad k \geq j \quad (80)$$

初值为 $\mathbf{x}_j^A = \mathbf{x}_j$, 因此 $\mathbf{x}_{k+1}^A = \mathbf{x}_j$ 。新增状态向量 \mathbf{x}_k^A 的滤波值即为固定点平滑 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^A = \hat{\mathbf{x}}_{j|k}$ ($k \geq j$)。

扩展状态后的状态方程和量测方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_k^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}_k \quad (81)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \begin{bmatrix} H_{k+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^A \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (82)$$

在 j 时刻, 状态向量满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_j^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} \quad (83)$$

应用标准卡尔曼滤波算法，即可解决上述固定点平滑问题。算法汇总于表9。

Table 9: 最优固定点平滑算法

状态方程与量测方程	$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k$ $\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$ $\mathbf{w}_k \sim (0, Q_k), \quad \mathbf{v}_k \sim (0, R_k), \quad x(0) \sim (\bar{\mathbf{x}}_0, P_0),$ 三者互不相关
-----------	---

卡尔曼滤波器
($k = 1, 2, \dots,$
 $j, j + 1, \dots$)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{0|0} &= E\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0, P_{0|0} = \text{var}[\mathbf{x}_0] = P_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= F_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + B_k \mathbf{u}_k \\ P_{k+1|k} &= F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ K_{k+1} &= P_{k+1|k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \\ P_{k+1|k+1} &= [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k}\end{aligned}$$

平滑器
($k = j, j + 1, \dots$)

$$\begin{aligned}P_{j|j-1}^* &= P_{j|j-1} \\ K_k^* &= P_{k|k-1}^* H_k^T [H_k P_{k|k-1}^* H_k^T + R_k]^{-1} \\ P_{k+1|k}^* &= P_{k|k-1}^* [F_k - K_k^* H_k]^T \\ \hat{\mathbf{x}}_{j|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{j|k-1} + K_k^* [\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] \\ P_{j|k} &= P_{j|k-1} - P_{k|k-1}^* H_k^T [K_k^*]^T\end{aligned}$$

6.3.2 固定点平滑算法 B

由固定区间平滑算法有

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|N} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^F + \mathcal{F}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F) \quad (84)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|N-1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^F + \mathcal{F}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^F) \quad (85)$$

两式相减得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|N} - \hat{\mathbf{x}}_{k|N-1} = \mathcal{F}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|N-1})$$

考虑 $k = j$ 固定, 那么

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_{j|N} - \hat{\mathbf{x}}_{j|N-1} &= \mathcal{F}_j(\hat{\mathbf{x}}_{j+1|N} - \hat{\mathbf{x}}_{j+1|N-1}) \\
 &= \mathcal{F}_j \mathcal{F}_{j+1}(\hat{\mathbf{x}}_{j+2|N} - \hat{\mathbf{x}}_{j+2|N-1}) \\
 &= \mathcal{F}_j \mathcal{F}_{j+1} \mathcal{F}_{j+2}(\hat{\mathbf{x}}_{j+3|N} - \hat{\mathbf{x}}_{j+3|N-1}) \\
 &= \dots \\
 &= \mathcal{B}_{j,N}(\hat{\mathbf{x}}_{N|N} - \hat{\mathbf{x}}_{N|N-1})
 \end{aligned}$$

其中, $\mathcal{B}_{j,N} = \mathcal{F}_j \mathcal{F}_{j+1} \cdots \mathcal{F}_{N-1} = \prod_{i=j}^{N-1} \mathcal{F}_i$ 。换言之

$$\hat{\mathbf{x}}_{j|k} = \hat{\mathbf{x}}_{j|k-1} + \mathcal{B}_{j,k}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (86)$$

$$\mathcal{B}_{j,k} = \mathcal{F}_j \mathcal{F}_{j+1} \cdots \mathcal{F}_{k-1} = \prod_{i=j}^{k-1} \mathcal{F}_i \quad (87)$$

式 (86) 可表示为

$$\hat{\mathbf{x}}_{j|k} = \hat{\mathbf{x}}_{j|k-1} + \mathcal{B}_{j,k} K_k (\mathbf{y}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

注意

$$\mathcal{F}_k = P_{k|k}^F F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1} \quad (88)$$

$$P_{j|k} = P_{j|k-1} + \mathcal{B}_{j,k} (P_{k|k} - P_{k|k-1}) \mathcal{B}_{j,k}^T \quad (89)$$

$$P_{j|k} = P_{j|k-1} - \mathcal{B}_{j,k} K_k H_k P_{k|k-1} \mathcal{B}_{j,k}^T, \quad k = j + 1, j + 2, \dots \quad (90)$$

6.4 最优固定延迟平滑

6.4.1 最优一步延迟平滑

根据引理2.4, 我们知道

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k+1}] = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_1^k] + E[\mathbf{x}_k | \tilde{\mathbf{y}}_{k+1|k}] - \bar{\mathbf{x}}_k$$

注意到 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_1^k]$, $\tilde{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \mathbf{y}_{k+1} - E[\mathbf{y}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^k]$, 于是可导出

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + M_{k|k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \\ M_{k|k+1} &= P_{k|k}F_k^T H_{k+1}^T [H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}\end{aligned}$$

考虑到 (标准卡尔曼滤波算法)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= K_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \\ K_{k+1} &= P_{k+1|k}H_{k+1}^T[H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}\end{aligned}$$

由于 $P_{k+1|k} > 0$, 一步延迟平滑公式可化为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + A_k[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \\ A_k = P_{k|k}F_k^T P_{k+1|k}^{-1} \end{cases} \quad (91)$$

6.4.2 最优二步延迟平滑

对于二步延迟平滑稳态，类似地我们有

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k+2} = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_1^{k+1}, \mathbf{y}_{k+2}] = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_1^{k+1}] + E[\mathbf{x}_k | \tilde{\mathbf{y}}_{k+2|k+1}] - \bar{\mathbf{x}}_k$$

由此不难导出

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k+2} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k+1} + M_{k|k+2}[\mathbf{y}_{k+2} - H_{k+2}\hat{\mathbf{x}}_{k+2|k+1}] \quad (92)$$

$$M_{k|k+2} = A_k A_{k+1} K_{k+2} \quad (93)$$

式中， A_k 是一步延迟平滑增益， K_k 是标准卡尔曼滤波增益。

同样地, (92)、(93) 也可以进一步化为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k+2} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + A_k[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+2} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \quad (94)$$

$$A_k = P_{k|k} F_k^T P_{k+1|k}^{-1} \quad (95)$$

同样的思想, 我们可以导出另一种固定区间平滑算法

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|N} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + A_k[\hat{\mathbf{x}}_{k+1|N} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \quad (96)$$

$$A_k = P_{k|k} F_k^T P_{k+1|k}^{-1} \quad (97)$$

与此对应的固定区间平滑的误差协方差矩阵为

$$P_{k|N} = P_{k|k} + A_k[P_{k+1|N} - P_{k+1|k}]A_k^T \quad (98)$$

Remark 6.1 这里我们没有给出最优固定延迟平滑的估计误差协方差计算公式，留作练习。注意有两个解决思路，一个是直接由估计误差协方差的定义结合对应的最优固定延迟平滑公式，另外一个应用静态估计理论相关结果。进一步的讨论可见等文献。

下面通过算例简单说明、验证上述平滑算法。

Example 6.1 考虑如下线性定常系统

$$x_{k+1} = x_k + w_k$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}$$

假设 $Q_k = 25, R_{k+1} = 15, P_0 = 100$, 计算验证三类平滑算法主要公式的有效性和正确性。

Solution 6.1 (1) 固定期间平滑

前向滤波计算

$$P_{k+1|k}^F = F_k P_{k|k}^F F_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

$$K_{k+1}^F = P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$$

$$P_{k+1|k+1}^F = [I - K_{k+1}^F H_{k+1}] P_{k+1|k}^F$$

平滑计算

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= P_{k|k}^F F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1} \\ P_{k|N} &= P_{k|k}^F - \mathcal{F}_k [P_{k+1|k}^F - P_{k+1|N}] \mathcal{F}_k^T \\ P_{N|N} &= P_{N|N}^F\end{aligned}$$

比较表10中 $P_{k|k-1}$ 、 $P_{k|k}$ 两列结果，可以发现滤波精度要高于一步预测精度。而从 $P_{k|4}$ 列结果可以看出，平滑精度要高于滤波精度。 $P_{k|k}$ 、 $P_{k|4}$ 两列最后一个数据是完全一致的，符合 $N=4$ 的客观事实。

Table 10: 固定期间平滑部分计算结果

k	$P_{k k-1}$	$P_{k k}$	$P_{k 4}$	K_k	\mathcal{F}_k
0		100	26.2274		0.8000
1	125.000	13.3929	9.7303	0.8929	0.3488
2	38.3929	10.7860	8.2945	0.7191	0.3014
3	35.7860	10.5696	8.3605	0.7046	0.2972
4	35.5696	10.5507	10.5507	0.7034	

(2) 固定点平滑

前向滤波计算

$$\begin{aligned}
 P_{k+1|k}^F &= F_k P_{k|k}^F F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\
 K_{k+1}^F &= P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \\
 P_{k+1|k+1}^F &= [I - K_{k+1}^F H_{k+1}] P_{k+1|k}^F
 \end{aligned}$$

平滑计算

$$\begin{aligned}
 P_{j|k} &= P_{j|k-1} + \mathcal{B}_{j,k} (P_{k|k} - P_{k|k-1}) \mathcal{B}_{j,k}^T \\
 \mathcal{B}_{j,k} &= \prod_{i=j}^{k-1} \mathcal{F}_i, \quad k = j+1, j+2, \dots \\
 \mathcal{F}_k &= P_{k|k}^F F_k^T (P_{k+1|k}^F)^{-1}
 \end{aligned}$$

Table 11: 固定点平滑部分计算结果

k	$P_{k k-1}$	$P_{k k}$	$P_{0 k}$	\mathcal{F}_k	$\mathcal{B}_{0,k}$
0		100	100	0.8	1
1	125.000	13.3929	28.5714	0.34884	0.8
2	38.3929	10.7860	26.4214	0.30140	0.27907
3	35.7860	10.5696	26.2430	0.29715	0.08411
4	35.5696	10.5507	26.2274		0.02499

表11中 $P_{k|k}$ 和 $P_{0|k}$ 两列中第一个数据相等, $P_{0|k}$ 列中最后一个数据与表10中 $P_{k|4}$ 列中第一个数据相等, 均符合预期。

(3) 固定延迟平滑

前向滤波计算

$$\begin{aligned}
 P_{k+1|k}^F &= F_k P_{k|k}^F F_k^T + G_k Q_k G_k^T \\
 K_{k+1}^F &= P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1|k}^F H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1} \\
 P_{k+1|k+1}^F &= [I - K_{k+1}^F H_{k+1}] P_{k+1|k}^F
 \end{aligned}$$

平滑计算

$$\begin{aligned}
 A_k &= P_{k|k} F_k^T P_{k+1|k}^{-1} \\
 P_{k|k+1} &= P_{k|k} + A_k [P_{k+1|k+1} - P_{k+1|k}] A_k^T
 \end{aligned}$$

表12中 $P_{k|4}$ 列来自固定区间平滑计算结果表10, $k=3$ 行对应的 $P_{k|k+1}$ 列数据和 $P_{k|4}$ 列数据相等, 也符合物理逻辑。

Table 12: 固定点平滑部分计算结果

k	$P_{k k-1}$	$P_{k k}$	$P_{k k+1}$	A_k	$P_{k 4}$
0		100	28.5714	0.8000	26.2274
1	125.000	13.3929	10.0334	0.3488	9.7303
2	38.3929	10.7860	8.4952	0.3014	8.2945
3	35.7860	10.5696	8.3605	0.2972	8.3605
4	35.5696	10.5507			10.5507

7. 本章小结

- 卡尔曼滤波算法便于在计算机上实时实现;
- 每一步由时间修正和量测修正两个环节构成, 前者基于系统的模型信息对状态进行估计, 后者基于量测信息对估计进行修正;
- 相关的公式看起来比较多、比较复杂, 其实和静态参数估计理论有着深刻的联系。

对于一步预测，即时间修正，不涉及新的量测信息，相对简单。

设已经获得 k 时刻的状态最优估计及其协方差矩阵 $(\hat{\mathbf{x}}_k, P_k)$ ，由系统的状态方程

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + B_k \mathbf{u}_k + G_k \mathbf{w}_k$$

可知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = E[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}_1^k] = F_k E[\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_1^k] + B_k \mathbf{u}_k = F_k \hat{\mathbf{x}}_k + B_k \mathbf{u}_k \quad (99)$$

由以上两式，根据协方差矩阵的定义即可导出

$$P_{k+1|k} = F_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (100)$$

式 (99) 和 (100) 便构成了最优一步预测公式（时间修正）。

一、融合估计与卡尔曼滤波

当获得 $k + 1$ 次量测, 即

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}, \quad \mathbf{v}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, R_{k+1})$$

可以建立此时的一个最优估计 (最小二乘)

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^a = (H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \mathbf{y}_{k+1} \\ P_{k+1}^a = (H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \end{cases}$$

将 $(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^a, P_{k+1}^a)$ 与 $(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$ 进行融合, 则得 $k+1$ 时刻状态的最优估计如下

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = P_{k+1}(P_{k+1|k}^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \mathbf{y}_{k+1}) \\ P_{k+1} = (P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \end{cases} \quad (101)$$

上式可以变换为其他等价形式。

考虑到卡尔曼滤波器的结构为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\ &= (I - K_{k+1}H_{k+1})\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} \end{aligned} \quad (102)$$

比较 (101) 与 (102), 可知

$$K_{k+1} = P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \quad (103)$$

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1|k} \quad (104)$$

式 (102)、(103)、(104) 即是标准的卡尔曼滤波公式。

二、最小二乘估计与卡尔曼滤波

在 $k+1$ 时刻，我们有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{x}_{k+1} + \boldsymbol{\epsilon}_{k+1}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, P_{k+1|k}) \quad (105)$$

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = H_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1} + \boldsymbol{v}_{k+1}, \quad \boldsymbol{v}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, R_{k+1}) \quad (106)$$

将 (105) 也视为量测方程之一，于是

$$E\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T = \begin{bmatrix} P_{k+1|k} & 0 \\ 0 & R_{k+1} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{W}^{-1}, \quad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} P_{k+1|k}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}.$$

由最小二乘估计可得

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = [\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}]^{-1} \mathcal{H}^T \mathcal{W} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\ \mathbf{y}_{k+1} \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathcal{H}^T \mathcal{W} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & H_{k+1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k+1|k}^{-1} & 0 \\ 0 & R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k+1|k}^{-1} & H_{k+1} R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H} = \begin{bmatrix} P_{k+1|k}^{-1} & H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ H_{k+1} \end{bmatrix} = P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1}$$

因此

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = P_{k+1} \left(P_{k+1|k}^{-1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + H_{k+1} R_{k+1}^{-1} \boldsymbol{y}_{k+1} \right) \\ P_{k+1} = (P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \end{cases} \quad (107)$$

可见得到了 (101) 一样的结果，其他讨论同上小节，不再赘述。

三、极大后验估计与卡尔曼滤波

极大后验估计指

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{y})} \Rightarrow \max$$

对于我们目前的问题，对应的概率密度函数为

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) = \mathcal{N}(H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}, R_{k+1})$$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$$

极大化后验概率密度相当于

$$J(\mathbf{x}_{k+1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1})^T R_{k+1}^{-1}(\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) \\ + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T P_{k+1|k}^{-1}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \Rightarrow \min$$

因此

$$P_{k+1|k}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) - H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}(\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}) = 0$$

于是可得

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = P_{k+1} \left(P_{k+1|k}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \mathbf{y}_{k+1} \right) \\ P_{k+1} = \left(P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \right)^{-1} \end{cases} \quad (108)$$

可见得到了与 (101)、(107) 相同的结果。

四、最小方差估计与卡尔曼滤波

$k + 1$ 时刻已知的信息可以描述为

$$\mathbf{y}_{k+1} = H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, P_{k+1|k})$$

$$\mathbf{v}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, R_{k+1})$$

由（线性）最小方差估计理论可知

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + K_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \quad (109)$$

其中

$$K_{k+1} = P_{x_{k+1}y_{k+1}} P_{y_{k+1}}^{-1}$$

容易导出

$$P_{y_{k+1}} = H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1}$$

$$P_{x_{k+1}y_{k+1}} = P_{k+1|k}H_{k+1}^T$$

所以卡尔曼滤波增益为

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (110)$$

另外，估计误差协方差为 ($P_{\hat{x}} = P_x - P_{xy}P_y^{-1}P_{xy}^T = P_{\tilde{x}_{MV}}$)

$$P_{k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}H_{k+1}P_{k+1|k}$$

$$= (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1|k} \quad (111)$$

可见，式 (109)、(110) 和 (7) 构成了卡尔曼滤波器的基本公式。

此外, 由 (109) 可知

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - K_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \\ &= \tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - K_{k+1}(H_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1}) \\ &= (I - K_{k+1}H_{k+1})\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} - K_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}\end{aligned}$$

因此

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1|k}(I - K_{k+1}H_{k+1})^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T \quad (112)$$

这是一个有利于保证正定对称性的计算公式, 而且对于非最优的 K_{k+1} 也成立!

五、相关噪声的滤波算法

对于过程噪声与量测噪声相关情况，在4.1小节中给出了何毓琦方法。这里从最小方差估计基本原理出发，探讨不同的解决方案。仍然采用同前一样的系统状态方程和量测方程，假设过程噪声及量测噪声特性为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &\sim \mathcal{N}(0, Q_k), & \mathbf{v}_k &\sim \mathcal{N}(0, R_k) \\ E\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T &= Q_k\delta_{kj}, & E\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T &= R_k\delta_{kj} \\ E\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^T &= C_k\delta_{k,j-1}, & (E\mathbf{w}_k\mathbf{v}_{k+1}^T &= C_k) \end{aligned}$$

注意这里关于两个噪声序列相关的假设和何毓琦方法中的描述有一点差异。此时， \mathbf{x}_{k+1} 与 \mathbf{v}_{k+1} 相关特性为

$$E\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}^T = G_k C_k$$

如果已经获得 k 时刻的无偏最优估计 $(\hat{\boldsymbol{x}}_k, P_k)$, 即 $\boldsymbol{x}_k \sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{x}}_k, P_k)$ 。由于 \boldsymbol{x}_k 与 \boldsymbol{w}_k 和 \boldsymbol{v}_{k+1} 无关, 根据状态方程可得

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} &= F_k \hat{\boldsymbol{x}}_k + B_k \boldsymbol{u}_k \\ P_{k+1|k} &= F_k P_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T\end{aligned}$$

因此, 问题化为关于 \boldsymbol{x}_{k+1} 的参数估计问题

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{k+1} &= H_{k+1} \boldsymbol{x}_{k+1} + \boldsymbol{v}_{k+1} \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &\sim \mathcal{N}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}, P_{k+1|k})\end{aligned}$$

由 (线性) 最小方差估计理论, 可知

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + K_{k+1}(\boldsymbol{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}) \quad (113)$$

由于

$$\begin{aligned}
 P_{x_{k+1}y_{k+1}} &= E[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})(H_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T] \\
 &= E[\dot{\mathbf{x}}_{k+1|k}(H_{k+1}\dot{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1})^T] = P_{k+1|k}H_{k+1}^T + G_k C_k \\
 P_{y_{k+1}} &= E[\dot{\mathbf{y}}_{k+1}\dot{\mathbf{y}}_{k+1}^T] = E[(H_{k+1}\dot{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1})(H_{k+1}\dot{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{v}_{k+1})^T] \\
 &= H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + H_{k+1}G_k C_k + C_k^T G_k^T H_{k+1}^T + R_{k+1}
 \end{aligned}$$

注意到

$$K_{k+1} = P_{x_{k+1}y_{k+1}} P_{y_{k+1}}^{-1}$$

以及

$$P_{k+1} = E[\dot{\mathbf{x}}_{k+1}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}^T] = P_{x_{k+1}} - P_{x_{k+1}y_{k+1}} P_{y_{k+1}}^{-1} P_{x_{k+1}y_{k+1}}^T$$

因此

$$K_{k+1} = (P_{k+1|k}H_{k+1}^T + G_k C_k) \cdot (H_{k+1}P_{k+1|k}H_{k+1}^T + H_{k+1}G_k C_k + C_k^T G_k^T H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_{k+1|k} - K_{k+1}(P_{k+1|k}H_{k+1}^T + G_k C_k)^T \\ &= (I - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1|k} - K_{k+1}C_k^T G_k^T \end{aligned} \quad (115)$$

式 (113)、(114) 和 (115) 便构成了此时过程噪声与量测噪声相关情况下的最优滤波算法。下面给出一个简单算例，以说明该算法的意义。

Example 7.1 考虑标量系统

$$x_{k+1} = 0.8x_k + w_k$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}$$

其中, $Ew_k = Ev_k = 0$, $Ew_k w_j^T = 1.0\delta_{kj}$, $Ev_k v_j^T = 0.1\delta_{kj}$, $Ew_k v_j^T = C\delta_{k,j-1}$ ($Ew_k v_{k+1}^T = C$)。

我们用标准卡尔曼滤波算法 (不考虑过程噪声和量测噪声的相关性) 和上述考虑过程噪声和量测噪声相关性的滤波算法进行仿真, 仿真 50 步后状态估计误差的方差比较见表 13。

结果表明, 当 $C = 0$ 时, 两种滤波算法的估计结果完全一样。而当 $C \neq 0$ 时, 考虑过程噪声和量测噪声相关性后的修正算法结果要明显好于标准卡尔曼滤波算法。□

Table 13: 过程噪声与量测噪声相关仿真结果

噪声相关系数 C	标准滤波算法 ($C = 0$)	修正滤波算法 (采用 C 值进行修正)
0	0.076	0.076
0.25	0.030	0.019
-0.25	0.117	0.052

Questions?