

最小方差控制原理

蔡远利 教授

西安交通大学 自动化学院

Outline

- 1 线性时不变随机控制系统分析
- 2 有理谱分解定理
- 3 离散时间随机系统的多项式表示
- 4 最小方差预测
- 5 最小方差控制
- 6 广义最小方差控制

引言

- 最小方差控制是随机系统一种经典优化控制方法，它的主要目标是找到控制策略使得系统输出的方差最小。
- 最小方差控制广泛用于数学模型不完全准确或存在噪声扰动的系统中，在工业过程控制、电力系统、通信系统、机器人、金融经济、汽车工业及航空航天等领域有广泛的应用。

功率谱密度——连续时间信号

谱密度是相关函数的傅里叶变换，其物理意义是功率谱密度。设 $y(t)$ 是一平稳随机过程，自相关函数 $R_y(t-s) = R_y(\tau)$ ：

$$R_y(t, s) = Ey(t)y(s) = Ey(t)y(t + \tau) = R_y(\tau) \quad (1)$$

功率谱密度定义为

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\tau\omega} R_y(\tau) d\tau, \quad -\infty < \omega < \infty \quad (2)$$

逆变换：

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\tau\omega} S_y(\omega) d\omega \quad (3)$$

功率谱密度的性质

功率谱密度具有下列重要性质：

(1) 非负： $S_y(\omega) \geq 0$

(2) ω 的实函数

(3) 实随机过程： $S_y(\omega)$ 是偶函数， $S_y(\omega) = S_y(-\omega)$

(4) 可积： $\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega < +\infty$

功率谱密度计算举例

Example

设平稳随机信号 $y(t)$ 的自相关函数为

$$r_y(\tau) = \beta^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0$$

试求功率谱密度 $S_y(\omega)$ 。

Solution

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^2 e^{-\alpha|\tau| - j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^0 \beta^2 e^{\alpha\tau - j\omega\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \beta^2 e^{-\alpha\tau - j\omega\tau} d\tau = \frac{2\alpha\beta^2}{\omega^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

白噪声过程

Definition (白噪声过程)

如果平稳随机过程 $w(t)$ 均值为零，相关函数为 $R_w(\tau) = R\delta(\tau)$ (R 是非负常数)，则 $S_w(\omega) = R$ ，称 $w(t)$ 为白噪声过程。

- 在任何两个不同时刻 $t_1 \neq t_2$ 不相关
- 功率谱极宽，对不同频率的信号都能产生干扰
- 若 $R = 1$ ，则称 $w(t)$ 为单位白噪声

功率谱密度——离散时间信号

设 $\{y_k\}$ 为零均值平稳随机序列，相关函数 $R_y(k-i) = R_y(n)$ 。
功率谱密度定义为

$$S_y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jn\omega} R_y(n) \quad (4)$$

逆变换：

$$R_y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\omega} S_y(\omega) d\omega \quad (5)$$

离散时间谱密度计算举例

Example

设平稳随机序列 $\{y_k\}$ 自相关函数 $r_y(n) = \beta^2 e^{-\alpha|n|}$, $\alpha > 0$ 。求功率谱密度。

Solution

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta^2 e^{-\alpha|n|} e^{-jn\omega} \\ &= \beta^2 \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{(\alpha-j\omega)n} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{(-\alpha-j\omega)n} \right] \\ &= \frac{(1 - e^{-2\alpha})\beta^2}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \omega + e^{-2\alpha}} \end{aligned}$$

离散时间白噪声

Definition (白噪声序列)

设 $\{w_k\}$ 为零均值实值平稳序列, 若 $S_w(\omega) = R$ ($\omega \in (-\pi, \pi)$), 则称 $\{w_k\}$ 为白噪声序列。

等价定义: 若 $R_w(k-i) = R\delta_{ki}$, 则 $S_w(\omega) = R$ 。
若 $R = 1$, 则称 $\{w_k\}$ 为单位白噪声序列。

线性时不变 (LTI) 系统

Definition (线性算子)

若 $L[\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2] = \alpha L[\mathbf{x}_1] + \beta L[\mathbf{x}_2]$, 则 L 为线性算子, 对应系统为线性系统。

Definition (时不变系统)

若 $\mathbf{y}(t + \tau) = L[\mathbf{x}(t + \tau)]$ 对任意 τ 成立, 则系统为时不变系统。

线性系统 + 时不变系统 = 线性时不变 (LTI) 系统。

LTI 系统输入输出关系

时域中，LTI 系统的输出等于输入与单位冲击响应的卷积：

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad (6)$$

Theorem

若 LTI 系统输入 $\mathbf{x}(t)$ 是平稳过程（期望 m_x ，相关函数 $R_x(\tau)$ ），则输出 $\mathbf{y}(t)$ 也是平稳过程。

LTI 系统输入输出频谱关系

传递函数 (矩阵): $\mathbf{H}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{h}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t)e^{-st}dt$

输出相关函数:

$$\mathbf{R}_y(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{R}_x(t) * \mathbf{h}^T(-t) \quad (7)$$

输出功率谱密度:

$$\Phi_y(\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\Phi_x(\omega)\mathbf{H}^T(-j\omega) \quad (8)$$

输入为单位白噪声时:

$$\Phi_y(\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{H}^T(-j\omega) \quad (9)$$

离散时间 LTI 系统

传递函数（矩阵）：

$$\mathbf{H}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{h}(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} \mathbf{h}(k) \quad (10)$$

输出相关函数：

$$\mathbf{R}_y(n) = \mathbf{h}(n) * \mathbf{R}_x(n) * \mathbf{h}^T(-n) \quad (11)$$

输出谱密度：

$$\Phi_y(\omega) = \mathbf{H}(e^{j\omega}) \Phi_x(\omega) \mathbf{H}^T(e^{-j\omega}) \quad (12)$$

SISO 系统简化：

$$\Phi_y(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (13)$$

有理谱分解

- 若谱密度 $S(\omega)$ 是有理函数，则称其为有理谱密度
- 有理函数是指可以表示为两个多项式之比的函数
- 具有有理谱密度的随机过程称为有理谱密度随机过程

连续时间有理谱分解

对于稳定 LTI 系统 $H(s)$ ，输入为平稳随机过程时：

$$S_y(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega)S_w(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_w(\omega) \quad (14)$$

当 $w(t)$ 为单位白噪声：

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 \quad (15)$$

谱分解问题： 已知 $S_y(\omega)$ ，能否分解为 $|H(j\omega)|^2$ ？

有理谱的因式分解

设有理谱密度:

$$S(\omega^2) = \frac{g_0\omega^{2m} + \cdots + g_m}{\omega^{2n} + f_1\omega^{2(n-1)} + \cdots + f_n} \geq 0 \quad (16)$$

用复频率 $s = \sigma + j\omega$ 表示:

$$S(s) = a^2 \frac{(s - a_1) \cdots (s - a_{2m})}{(s - b_1) \cdots (s - b_{2n})} \quad (17)$$

且有:

$$S(\omega^2) = H(j\omega)H(-j\omega) = |H(j\omega)|^2 \quad (18)$$

其中 $H(s)$ 的所有极点都在左半平面, 所有零点不在右半平面。

有理谱分解定理与表现定理

Theorem (有理谱分解定理)

对于有理谱密度 $S(\omega^2)$ ，必存在有理函数 $H(s)$ ，其全部极点都在左半平面，全部零点不在右半平面，且满足

$$S(\omega^2) = H(j\omega)H(-j\omega) = |H(j\omega)|^2 \quad (19)$$

Theorem (表现定理)

一定存在一个渐进稳定的 LTI 系统 $H(s)$ ，当输入为单位白噪声时，输出稳态信号的谱密度为 $S(\omega^2)$ 。

有理谱分解举例

Example

考虑 $\Phi(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^2 + 1} = \frac{(j\omega + 2)(-j\omega + 2)}{(j\omega + 1)(-j\omega + 1)}$, 试建立产生方法。

Solution

4 种可能分解, 其中最小相位系统:

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1}, \quad H(s) = \frac{s + 2}{s + 1}$$

在单位白噪声作用下, 稳定 LTI 系统 $H(s)$ 的输出功率谱密度为 $\Phi(\omega)$ 。

离散时间有理谱分解

平稳随机序列的谱密度:

$$S(\omega) = \frac{g_0 e^{jm\omega} + \cdots + g_m}{e^{jn\omega} + f_1 e^{j(n-1)\omega} + \cdots + f_n} e^{jk\omega} \quad (20)$$

令 $z = e^{j\omega}$, 因式分解:

$$S(z) = C^2 \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_m)}{(z - b_1) \cdots (z - b_n)} \quad (21)$$

由 $R_y(m) = R_y(-m)$ 可得 $S(z) = S(z^{-1})$, 零极点成对出现。

离散时间谱分解

谱分解结果：

$$S(\omega) = H(z)H(z^{-1}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (22)$$

其中

$$H(z) = C \frac{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{m/2})}{(z - \beta_1) \cdots (z - \beta_{n/2})}$$
$$H(z^{-1}) = C \frac{(z - \alpha_1^{-1}) \cdots (z - \alpha_{m/2}^{-1})}{(z - \beta_1^{-1}) \cdots (z - \beta_{n/2}^{-1})}$$

$H(z)$ 的所有极点都在单位圆内，零点在单位圆内或单位圆上。

离散时间谱分解定理

Theorem (谱分解定理——离散时间)

对于有理谱函数 $S(\omega)$ ，必存在有理函数 $H(z)$ ，其全部极点都在单位圆内，全部零点在单位圆内或单位圆上，且

$$S(\omega) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (23)$$

Theorem (表现定理——离散时间)

一定存在渐进稳定的 LTI 系统 $H(z)$ ，当输入为单位白噪声序列时，稳态输出序列的谱密度为 $S(\omega)$ 。

离散时间谱分解举例 1

Example

对 $\Phi(\omega) = \frac{1.25 + \cos \omega}{1.0625 + 0.5 \cos \omega} = \frac{(e^{j\omega} + 0.5)(e^{-j\omega} + 0.5)}{(e^{j\omega} + 0.25)(e^{-j\omega} + 0.25)}$ 进行谱分解。

Solution

$$H(z) = \frac{z + 0.5}{z + 0.25}$$

没有单位圆之外的零点或极点，具有最小相位。

离散时间谱分解举例 2

Example

$$S_y(\omega) = \frac{1.01 - 0.2 \cos \omega}{1.25 + \cos \omega} = \frac{(e^{j\omega} - 0.1)(e^{-j\omega} - 0.1)}{(e^{j\omega} + 0.5)(e^{-j\omega} + 0.5)}, \quad \text{试进行谱分解。}$$

Solution

$$H_1(z) = \frac{z - 0.1}{z + 0.5}, \quad H_2(z) = \frac{1 - 0.1z}{1 + 0.5z}$$
$$H_3(z) = \frac{1 - 0.1z}{z + 0.5}, \quad H_4(z) = \frac{z - 0.1}{1 + 0.5z}$$

H_2, H_4 极点在单位圆外，系统不稳定。选**最小相位** $H_1(z)$ 。

离散时间谱分解举例 2 (续)

设 $\{w_k\} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{2\pi})$ 独立, $S_w(\omega) = 1$, 作用于 $H_1(z)$:

$$y_{k+1} + 0.5y_k = w_{k+1} - 0.1w_k$$

传递函数展开:

$$H_1(z) = \frac{z - 0.1}{z + 0.5} = 1 + 1.2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-0.5)^i z^{-i}$$

输出表示为输入的线性组合:

$$y_k = w_k + 1.2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-0.5)^i w_{k-i}$$

平稳随机过程对应的多项式系统

有理谱密度 $\Phi_y(e^{jw})$ 谱分解得:

$$\Phi_y(e^{jw}) = H(e^{jw})qH(e^{-jw}) \quad (24)$$

最小相位 $H(z)$, 相对阶 0, 首一多项式:

$$H(z) = \frac{z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (25)$$

w_k 为零均值、方差 q 的白噪声:

$$y_k = H(z)w_k \quad (26)$$

加入控制输入

由线性系统叠加原理:

$$\begin{aligned} & y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} \\ &= b_0 u_{k-d} + b_1 u_{k-d-1} + \cdots + b_m u_{k-d-m} \\ &+ w_k + c_1 w_{k-1} + \cdots + c_n w_{k-n} \end{aligned} \quad (27)$$

引入移位算子 $y_{k-1} = z^{-1}y_k$:

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + C(z^{-1})w_k \quad (28)$$

多项式系数与基本假设

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}, \quad b_0 \neq 0$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n}$$

$d \geq 0$ 表示控制延迟。假设 $C(z^{-1})$ 是稳定的。

基本假设：

- (1) $w_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, 独立同分布高斯白噪声
- (2) $k > l$ 时 $E\{w_k y_l\} = 0$

状态方程对应系统

SISO 状态空间表示:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + Gu_k + Je_k \quad (29)$$

$$y_k = H\mathbf{x}_k + v_k \quad (30)$$

$e_k \sim \mathcal{N}(0, Q')$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, R')$, 相互独立。

z 变换得传递函数形式:

$$Y(z) = H(zI - F)^{-1}GU(z) + H(zI - F)^{-1}JE(z) + V(z) \quad (31)$$

状态方程转多项式形式

令 $H_E(z)$ 为 $E(z)$ 系数, 谱分解确定 q 和 $H(z)$:

$$H(e^{jw})qH(e^{-jw}) = H_E(e^{jw})Q'H_E(e^{-jw}) + R' \quad (32)$$

令 $H(z) = C_1(z)/A_1(z)$, $A_2(z) = |zI - F|$, $B_2(z) = H[\text{adj}(zI - F)]G$:

$$Y(z) = \frac{B_2(z)}{A_2(z)}U(z) + \frac{C_1(z)}{A_1(z)}W(z) \quad (33)$$

定义变换:

$$A(z^{-1}) = z^{-(n_1+n_2)}A_1(z)A_2(z) \quad (34)$$

$$B(z^{-1}) = z^{-(n_1+m_2)}A_1(z)B_2(z) \quad (35)$$

$$C(z^{-1}) = z^{-(n_1+n_2)}C_1(z)A_2(z) \quad (36)$$

$$d = n_2 - m_2 \quad (37)$$

即可化为标准形式 $A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + C(z^{-1})w_k$ 。

丢番图方程 (Diophantine Equation)

对 $C(z^{-1})$ 和 $A(z^{-1})$ 进行长除法 (假设 A 稳定):

$$\begin{array}{r} F(z^{-1}) \\ A(z^{-1}) \sqrt{C(z^{-1})} \\ \vdots \\ \hline z^{-d}G(z^{-1}) \end{array} \quad (38)$$

除法进行 d 步得到丢番图方程:

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) = C(z^{-1}) \quad (39)$$

特解形式:

$$F(z^{-1}) = 1 + f_1 z^{-1} + \cdots + f_{d-1} z^{-(d-1)} \quad (40)$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots + g_{n-1} z^{-(n-1)} \quad (41)$$

随机 SISO 系统规范描述

将系统方程 $Ay_k = z^{-d}Bu_k + Cw_k$ 两端乘以 z^dF , 代入丢番图方程:

$$y_{k+d} = \frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k + Fw_{k+d} \quad (42)$$

(1) $\frac{G}{C}y_k$: $\{y_k, y_{k-1}, \dots\}$ 的线性组合

(2) $\frac{BF}{C}u_k$: $\{u_k, u_{k-1}, \dots\}$ 的线性组合

(3) $Fw_{k+d} = w_{k+d} + f_1w_{k+d-1} + \dots + f_{d-1}w_{k+1}$, 与前两项独立

最小方差预测

记 $\mathbf{Y}^k = \{y_k, y_{k-1}, \dots\}$, d 步最小方差预测:

$$\hat{y}_{k+d|k} = E[y_{k+d} | \mathbf{Y}^k] \quad (43)$$

预测误差:

$$\tilde{y}_{k+d|k} \triangleq y_{k+d} - \hat{y}_{k+d|k} \quad (44)$$

代价函数:

$$j_k \triangleq E(\tilde{y}_{k+d|k}^2) = E[(y_{k+d} - \hat{y}_{k+d|k})^2] \quad (45)$$

最优预测

将 $y_{k+d} = \frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k + Fw_{k+d}$ 代入代价函数:

$$j_k = E\left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k - \hat{y}_{k+d|k}\right)^2 + E(Fw_{k+d})^2$$

在给定 $\mathbf{Y}^k$ 条件下, 由 j_k 取极小得:

$$\hat{y}_{k+d|k} = \frac{G(z^{-1})}{C(z^{-1})}y_k + \frac{B(z^{-1})F(z^{-1})}{C(z^{-1})}u_k \quad (46)$$

最小均方误差:

$$j_k^* = E(Fw_{k+d})^2 = q(1 + f_1^2 + \cdots + f_{d-1}^2) \quad (47)$$

预测误差: $\tilde{y}_{k+d|k} = F(z^{-1})w_{k+d}$

最小方差预测器的结构

预测器的输出可分解为：

$$y_{k+d} = \hat{y}_{k+d|k} + \tilde{y}_{k+d|k} \quad (48)$$

预测值仅依赖于 k 时刻及其之前的值，预测误差仅依赖于 k 时刻之后的噪声值。

d 步预测器结构图

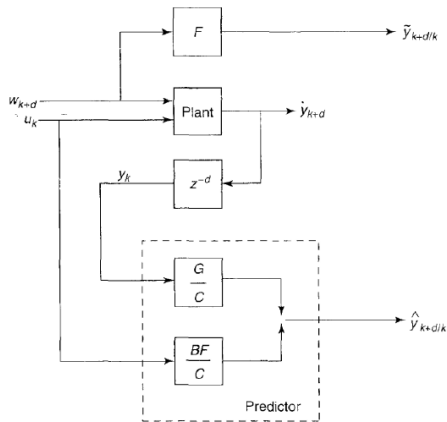


Figure: d 步预测器

预测举例 1——问题描述

Example

$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})y_k = z^{-d}b_0 u_k + (1 + c_1 z^{-1})w_k$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, q)$ 。建立一步和二步预测器。

Solution

一步预测 ($d = 1$):

$$\frac{C}{A} = \frac{1 + c_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = 1 + z^{-1} \frac{(c_1 - a_1) - a_2 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

由丢番图方程: $F(z^{-1}) = 1$, $G(z^{-1}) = (c_1 - a_1) - a_2 z^{-1}$

预测举例 1——一步预测

由最小方差预测公式：

$$(1 + c_1 z^{-1})\hat{y}_{k+1|k} = [(c_1 - a_1) - a_2 z^{-1}]y_k + b_0 u_k$$

递推形式：

$$\hat{y}_{k+1|k} = -c_1 \hat{y}_{k|k-1} + (c_1 - a_1)y_k - a_2 y_{k-1} + b_0 u_k$$

初始值： $\hat{y}_{0|-1} = 0$, $y_{-1} = 0$ 。

最小均方误差： $j_k^* = q$ 。

预测举例 1——二步预测

二步预测 ($d = 2$):

长除法:

$$\begin{aligned}\frac{C}{A} &= 1 + (c_1 - a_1)z^{-1} \\ &\quad + z^{-2} \frac{[-a_2 - a_1(c_1 - a_1)] - a_2(c_1 - a_1)z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}\end{aligned}$$

因此

$$F(z^{-1}) = 1 + (c_1 - a_1)z^{-1}$$

$$G(z^{-1}) = [-a_2 - a_1(c_1 - a_1)] - a_2(c_1 - a_1)z^{-1}$$

预测举例 1——二步预测（续）

预测器：

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+2|k} = & -c_1\hat{y}_{k+1|k-1} - [a_2 + a_1(c_1 - a_1)]y_k \\ & - a_2(c_1 - a_1)y_{k-1} + b_0u_k + b_0(c_1 - a_1)u_{k-1}\end{aligned}$$

均方误差：

$$j_k^* = q + (c_1 - a_1)^2 q$$

预测举例 2——问题描述

Example

已知

$$y_k + 0.3y_{k-1} = w_k + 0.4w_{k-1} - 0.07w_{k-2} - 0.01w_{k-3}$$

$\{w_k\}$ 为零均值单位白噪声。求一步、二步最小方差预测。

预测举例 2——系统分析

Solution

系统描述:

$$y_k = \frac{1 + 0.4z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3}}{1 + 0.3z^{-1}} w_k$$

极点 $\{0, 0, -0.3\}$, 零点 $\{-0.1, 0.2, -0.5\}$, 最小相位系统。

预测举例 2——长除法

$$\begin{array}{r} 1 + 0.1z^{-1} \leftarrow F_1, F_2 \\ 1 + 0.3z^{-1} \sqrt{1 + 0.4z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3}} \\ \underline{1 + 0.3z^{-1}} \\ 0.1z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3} \\ \underline{0.1z^{-1} + 0.03z^{-2}} \\ -0.10z^{-2} - 0.01z^{-3} \end{array}$$

预测举例 2——一步预测

一步预测 ($d = 1$):

$$F(z^{-1}) = 1, \quad G(z^{-1}) = 0.1 - 0.07z^{-1} - 0.01z^{-2}$$

$$\hat{y}_{k+1|k} = \frac{0.1 - 0.07z^{-1} - 0.01z^{-2}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3}} y_k$$

$$j_k^* = 1$$

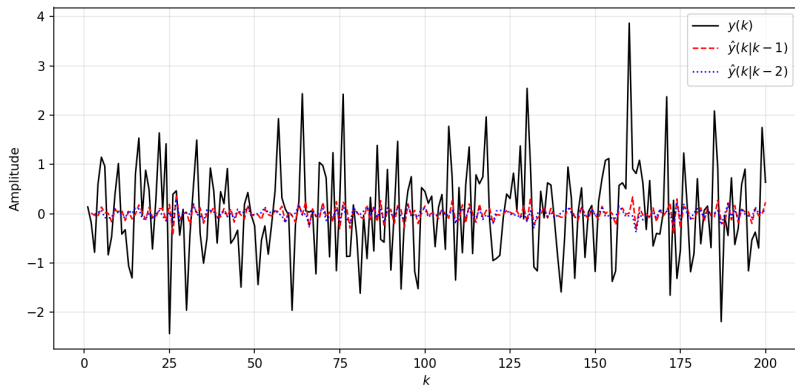
二步预测 ($d = 2$):

$$F(z^{-1}) = 1 + 0.1z^{-1}, \quad G(z^{-1}) = -0.10 - 0.01z^{-1}$$

$$\hat{y}_{k+2|k} = \frac{-0.10 - 0.01z^{-1}}{1 + 0.4z^{-1} - 0.07z^{-2} - 0.01z^{-3}} y_k$$

$$j_k^* = 1 + 0.1^2 = 1.01$$

预测举例 2——仿真比较



系统输出与一步、二步最小方差预测

预测举例 3

Example

$(1 - 0.8z^{-1})y_k = 0.2u_{k-2} + (1 + 0.7z^{-1})v_k$, $\{v_k\}$ 方差 σ^2 。试确定最小方差预测。

Solution

$A = 1 - 0.8z^{-1}$, $C = 1 + 0.7z^{-1}$, $d = 2$ 。

设 $F = 1 + f_1z^{-1}$, $G = g_0$, 代入丢番图方程:

$$1 + 0.7z^{-1} = (1 + f_1z^{-1})(1 - 0.8z^{-1}) + z^{-2}g_0$$

比较系数: $f_1 = 1.5$, $g_0 = 1.2$ 。

预测举例 3 (续)

最小方差预测:

$$\hat{y}_{k+2|k} = \frac{1.2y_k + (0.2 + 0.3z^{-1})u_k}{1 + 0.7z^{-1}}$$

递推形式:

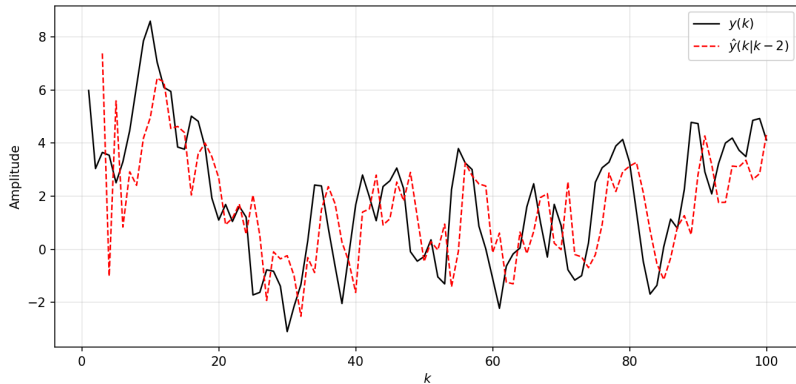
$$\hat{y}_{k+2|k} = -0.7\hat{y}_{k+1|k-1} + 1.2y_k + 0.2u_k + 0.3u_{k-1}$$

预测误差:

$$\tilde{y}_{k+2|k} = F(z^{-1})v_{k+2} = v_{k+2} + 1.5v_{k+1}$$

预测误差方差: $j_k^* = E\tilde{y}_{k+2|k}^2 = 3.25\sigma^2$

预测举例 3——仿真结果



系统输出与二步最小方差预测 (u_k 为单位阶跃, v_k 为单位白噪声)

最小方差控制问题

系统描述:

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + C(z^{-1})w_k \quad (49)$$

$w_k \sim \mathcal{N}(0, q)$ 。

目标: 选择 u_k , 使系统输出 d 步预测 $\hat{y}_{k+d|k}$ 的方差最小。

代价函数 (调节问题):

$$J(u_k) = \text{var}[y_{k+d} | \mathbf{Y}^k] \quad (50)$$

最小方差控制策略

由 $y_{k+d} = \frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k + Fw_{k+d}$:

$$J(u_k) = \left(\frac{G}{C}y_k + \frac{BF}{C}u_k \right)^2 + E(Fw_{k+d})^2$$

令 $\partial J / \partial u_k = 0$, 得**最小方差控制策略**:

$$u_k = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1})}y_k \quad (51)$$

最优代价:

$$J^*(u_k) = q(1 + f_1^2 + \cdots + f_{d-1}^2) \quad (52)$$

与最小方差预测的均方误差相同。

最小方差控制器的结构

- (1) 反馈回路包含动态过程，属于动态输出反馈
- (2) 可视为单回路调节器，只能改变极点，不能改变零点
- (3) 最小方差控制隐含地包括了最小方差预测

最小方差控制器

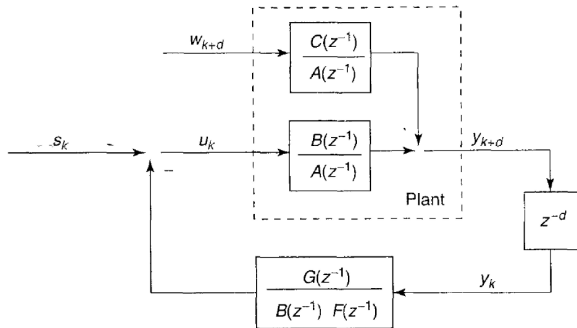


Figure: 最小方差控制器

闭环系统分析

将 $u_k = -\frac{G}{BF}y_k$ 代入系统，代入丢番图方程：

$$\left(A + z^{-d}\frac{BG}{BF}\right)y_k = Cw_k \implies y_k = \frac{BFC}{BC}w_k \quad (53)$$

若 $B(z^{-1})$ 稳定（最小相位），消去 BC ：

$$y_k = F(z^{-1})w_k \quad (54)$$

即最小方差控制的调节误差等于最小方差预测的预测误差。

参考输入 s_k 到 y_{k+d} 的闭环传递：

$$y_{k+d} = \frac{B^2F}{BC}s_k \quad (55)$$

闭环特征多项式： $\Delta^cl(z) = B(z^{-1})C(z^{-1})z^{m+n}$

最小方差控制举例 1

Example

求例 (Page 20) 中的最小方差控制。

Solution

一步控制器 ($d = 1$):

$$\begin{aligned}(1 + c_1 z^{-1})\hat{y}_{k+1|k} &= [(c_1 - a_1) - a_2 z^{-1}]y_k + b_0 u_k = 0 \\ u_k &= \frac{-(c_1 - a_1)}{b_0} y_k + \frac{a_2}{b_0} y_{k-1}\end{aligned}\tag{56}$$

调节误差: $y_k = w_k$, 方差 $j_k^* = q$ 。

最小方差控制举例 1 (续)

二步控制器 ($d = 2$): 令 $\hat{y}_{k+2|k} = \hat{y}_{k+1|k-1} = 0$:

$$u_k = -(c_1 - a_1)u_{k-1} + \frac{a_2 + a_1(c_1 - a_1)}{b_0}y_k \\ + \frac{a_2(c_1 - a_1)}{b_0}y_{k-1}$$

调节误差:

$$y_k = w_k + (c_1 - a_1)w_{k-1}$$

方差: $j_k^* = q + (c_1 - a_1)^2 q$

调节误差方差随控制延迟增加而增大。

最小方差控制举例 2

Example

求例 (Page 46) 中的最小方差控制。

Solution

$F = 1 + 1.5z^{-1}$, $G = 1.2$, $B = 0.2$ 。

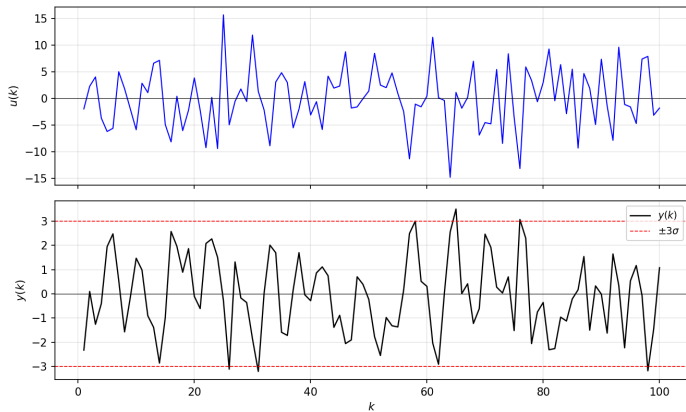
最小方差控制：

$$u_k = -\frac{1.2y_k}{0.2 + 0.3z^{-1}} \implies u_k = -1.5u_{k-1} - 6y_k$$

调节误差： $y_k = v_k + 1.5v_{k-1}$

最优代价： $J^* = 3.25\sigma^2$

最小方差控制举例 2——仿真结果



最小方差控制下的控制信号与系统输出 (v_k 为单位白噪声)

最小方差控制讨论

- 控制策略 u_k 是现在及过去所有输出的线性组合
- 被控量的最小方差是与时间无关的常数
- $y_k = F(z^{-1})w_k$ 是零均值 $d - 1$ 阶滑动平均过程
- 控制的输出 y_{k+d} 即为预测误差 $\tilde{y}_{k+d|k}$
- 高斯假设换为二阶矩假设后，为线性最小方差控制

局限性

- $C(z^{-1})$ 稳定——保证预测稳定性
- $B(z^{-1})$ 稳定——最小相位系统要求
- 当 $B(z^{-1})$ 不稳定时，需采用**广义最小方差控制**

广义最小方差控制

最小方差控制的代价函数 $J(u_k) = \text{var}[y_{k+d}|\mathbf{Y}^k]$ 较为朴素。

广义最小方差控制将控制能耗、过程品质等附加要求纳入代价函数。

系统描述（同前）：

$$A(z^{-1})y_k = z^{-d}B(z^{-1})u_k + C(z^{-1})w_k \quad (57)$$

$$w_k \sim N(0, q)。$$

一般形式的代价函数

$$J(u_k) = E\{[P(z^{-1})y_{k+d} - Q(z^{-1})s_k]^2 + [R(z^{-1})u_k]^2 | \mathbf{Y}^k\} \quad (58)$$

加权多项式:

$$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_{n_P} z^{-n_P} \quad (59)$$

$$Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_{n_Q} z^{-n_Q} \quad (60)$$

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \cdots + r_{n_R} z^{-n_R} \quad (61)$$

s_k 为参考信号。

常见代价函数形式 (1/2)

最省能量控制

$P = 1, Q = 0, R = r_0$:

$$J(u_k) = E[y_{k+d}^2 + r_0^2 u_k^2 | \mathbf{Y}^k] \quad (62)$$

最小变化率控制

$P = 1, Q = 0, R = r_0(1 - z^{-1})$:

$$J(u_k) = E[y_{k+d}^2 + r_0^2 (u_k - u_{k-1})^2 | \mathbf{Y}^k] \quad (63)$$

常见代价函数形式 (2/2)

最优跟踪控制

$P = Q = 1, R = r_0$:

$$J(u_k) = E[(y_{k+d} - s_k)^2 + r_0^2 u_k^2 | \mathbf{Y}^k] \quad (64)$$

当 $P = 1, Q = 0, R = 0$ 时, 退化为最小方差控制。

广义最小方差控制策略

由最小方差预测: $\hat{y}_{k+j|k} = \frac{G_j}{C} y_k + \frac{BF_j}{C} u_{k-d+j}$
代入代价函数, 求 $\partial J / \partial u_k = 0$:

$$b_0(P\hat{y}_{k+d|k} - Qs_k) + r_0Ru_k = 0 \quad (65)$$

即广义最小方差控制策略:

$$P\hat{y}_{k+d|k} + \frac{r_0}{b_0}Ru_k - Qs_k = 0 \quad (66)$$

广义最小方差控制器

定义复合多项式:

$$G'(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{n_P} p_j G_{d-j}(z^{-1}) \quad (67)$$

$$F'(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{n_P} p_j B(z^{-1}) F_{d-j}(z^{-1}) z^{-j} + \frac{r_0}{b_0} C(z^{-1}) R(z^{-1}) \quad (68)$$

广义最小方差控制策略:

$$F'(z^{-1})u_k = -G'(z^{-1})y_k + C(z^{-1})Q(z^{-1})s_k \quad (69)$$

广义最小方差控制器结构

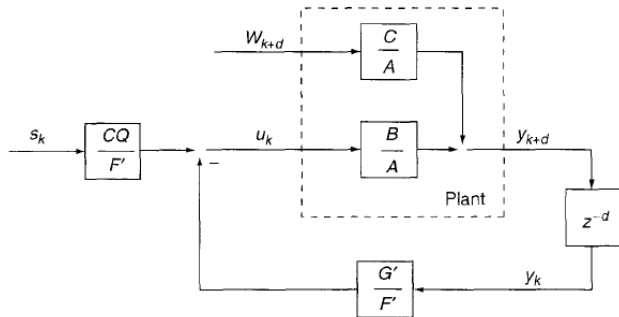


Figure: 广义最小方差控制器

由于存在反馈和前馈，不仅可以改变系统的极点，也可以调整系统的零点。

两种简化形式

形式 1: $P = 1, Q = 0, R = 0$ ——最小方差控制

$$B(z^{-1})F_d(z^{-1})u_k = -G_d(z^{-1})y_k$$

形式 2: $P = 1, Q = 0, R = \mu$ ——最常用的广义最小方差控制

$$u_k = -\frac{G(z^{-1})}{B(z^{-1})F(z^{-1}) + \frac{\mu}{b_0}C(z^{-1})}y_k \quad (70)$$

其中 μ 调节控制精度与能耗之间的平衡。

闭环系统分析

从 s_k 到 y_{k+d} 的闭环传递函数:

$$H^{cl}(z) = \frac{CQ}{F'} \frac{BF'}{AF' + BG'z^{-d}} \quad (71)$$

闭环特征多项式:

$$\Delta^{cl}(z) = (AF' + BG'z^{-d})z^h \quad (72)$$

其中 h 是抵消 z 最高次负幂所必需的幂数。

由于存在反馈和前馈, **不仅可以改变极点, 也可以调整零点。**

综合举例——问题描述

Example

系统的传递函数：

$$Y(z) = \frac{z - 0.5}{z^3 + 1.5z^2 - z}U(z) + \frac{z^3 + 0.25z^2}{z^3 + 1.5z^2 - z}W(z)$$

$w_k \sim N(0, q)$ 。性能指标：

$$J(u_k) = E\{[(y_{k+2} - y_{k+1}) - (s_k - s_{k-1})]^2 + (u_k - u_{k-1})^2\}$$

试设计广义最小方差控制器。

综合举例——系统分析

系统多项式表示 ($d = 2$):

$$(1 + 1.5z^{-1} - 1.0z^{-2})y_k = z^{-2}(1 - 0.5z^{-1})u_k + (1 + 0.25z^{-1})w_k$$

极点 $\{0.5, -2\}$, 原系统不稳定。

性能指标对应:

$$P = 1 - z^{-1}, \quad Q = 1 - z^{-1}, \quad R = 1 - z^{-1}$$

综合举例——丢番图方程求解

长除法：

$$F_1 = 1, \quad G_1 = -1.25 + z^{-1}$$

$$F_2 = 1 - 1.25z^{-1}, \quad G_2 = 2.875 - 1.25z^{-1}$$

复合多项式 ($n_P = 1$):

$$G' = p_0 G_2 + p_1 G_1 = 4.125 - 2.25z^{-1}$$

$$\begin{aligned} F' &= B(p_0 F_2 + p_1 F_1 z^{-1}) + \frac{r_0}{b_0} C R \\ &= 2 - 3.5z^{-1} + 0.875z^{-2} \end{aligned}$$

综合举例——控制律

广义最小方差控制策略：

$$(2 - 3.5z^{-1} + 0.875z^{-2})u_k = -(4.125 - 2.25z^{-1})y_k \\ + (1 - 0.75z^{-1} - 0.25z^{-2})s_k$$

递推格式：

$$u_k = \frac{1}{2}(3.5u_{k-1} - 0.875u_{k-2} - 4.125y_k + 2.25y_{k-1} \\ + s_k - 0.75s_{k-1} - 0.25s_{k-2})$$

综合举例——闭环分析

闭环特征多项式：

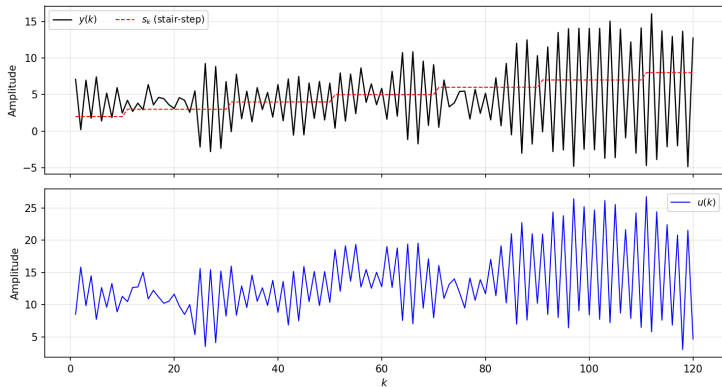
$$\begin{aligned}\Delta^{cl}(z) &= (AF' + BG'z^{-d})z^h \\ &= 2z^4 - 0.5z^3 - 2.25z^2 + 0.5z + 0.25\end{aligned}$$

闭环极点： $\{-0.25, 0.5, -1.0, 1.0\}$

结论

即使原系统不稳定，**闭环系统可达临界稳定**。广义最小方差控制可以有效处理非最小相位系统和不稳定系统。

综合举例——仿真结果



广义最小方差控制仿真 ($w_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, s_k 为阶梯信号)

本章小结

- 最小方差控制是随机系统经典最优控制方法，广泛用于工业过程控制、自动驾驶、通信系统等领域。
- 核心思想：在噪声干扰下，通过优化控制策略最小化系统输出方差。
- 有理谱分解定理是最小方差控制的理论基础。
- 丢番图方程提供了求解最小方差预测的系统性工具。
- 最小方差控制通过将 d 步预测置为零获得最优控制律。
- 广义最小方差控制引入加权多项式，可灵活调节性能（能耗、变化率、跟踪精度等）。
- 在系统模型存在不确定性和噪声的情况下，最小方差控制具备良好的鲁棒性能。

Q & A