

连续时间系统的滤波与平滑

蔡远利教授

西安交通大学

2026 Spring

- 掌握连续时间随机系统的滤波与平滑理论
- 理解卡尔曼滤波的连续时间形式
- 学会处理过程噪声与量测噪声相关的系统
- 掌握非线性系统连续时间滤波算法

考虑连续时间动态系统：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2)$$

其中：

- $\mathbf{w}(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}(t))$ 过程噪声
- $\mathbf{v}(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}(t))$ 量测噪声
- $\mathbf{x}(0) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$ 初始状态

由线性系统理论可知：

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau$$

其中转移矩阵满足：

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

系统离散化

离散化系统为：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k^d \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}^d \quad (4)$$

离散化近似：

$$\mathbf{F}_k \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}(k\Delta t)\Delta t \quad (5)$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{G}(k\Delta t) \quad (6)$$

噪声协方差的离散化需要注意：连续时间噪声是白噪声过程，其协方差 $\mathbf{Q}(t)$ 、 $\mathbf{R}(t)$ 为**功率谱密度矩阵**，经采样间隔 Δt 累积为离散协方差：

$$\mathbf{Q}_k^d = \mathbf{Q}(t)\Delta t \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_k^d = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{R}(t) \quad (8)$$

区别在于：过程噪声 $\mathbf{w}(t)$ 在 Δt 内持续积分，方差随 Δt 增大而增大；量测噪声 $\mathbf{v}(t)$ 经采样保持器输出，采样间隔越小高频分量越多，方差随 Δt 减小而增大。

离散化仿真示例

考虑连续时间线性时不变随机系统：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_c) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_c)\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)$ 是连续时间白噪声, $\mathbf{u}(t)$ 是确定性控制信号。
根据离散化关系, 该系统近似等价于如下离散时间系统：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_k + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{w}_k \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}_k + e^{\mathbf{A}\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_c \Delta t)$, $\mathbf{v}_{k+1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_c / \Delta t)$ 。

连续时间卡尔曼滤波算法

将离散卡尔曼滤波公式中的状态转移矩阵近似为 $F_k = I + F(t)\Delta t$, 并令采样间隔 $\Delta t \rightarrow 0$, 可导出连续时间卡尔曼滤波算法:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) = & \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) \\ & - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \end{aligned} \quad (10)$$

其中滤波增益为:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)$$

上式即为连续时间卡尔曼滤波的微分 Riccati 方程, 描述了均方误差阵随时间的演化。

连续时间 Kalman 滤波算法 (含确定性输入)

对于含有确定性输入的系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (11)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (12)$$

对应的滤波算法为:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{d}(t)] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) = & \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) \\ & - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \end{aligned} \quad (14)$$

特殊例子：常数估计

$$\dot{x} = 0$$

$$y = x + v, \quad v \sim \mathcal{N}(0, R)$$

其中 $F = 0$, $Q = 0$, $H = 1$

协方差解为：

$$P(t) = \frac{P_0}{1 + P_0 t / R}$$

滤波增益为：

$$K(t) = \frac{P_0 / R}{1 + P_0 t / R}$$

特殊例子：速度估计

$$\begin{aligned}\dot{x} &= w, & w &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ y &= x + v, & v &\sim \mathcal{N}(0, R)\end{aligned}$$

其中 $F = 0$, $H = 1$
协方差解为：

$$\dot{P} = -\frac{P^2}{R} + Q$$

稳态时： $P = \sqrt{QR}$

当 $t > T$ 后没有量测数据时:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t), \quad t > T \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, T)\hat{\mathbf{x}}(T) \quad (16)$$

系统状态的预测协方差为:

$$\mathbf{P}(t) = \Phi(t, T)\mathbf{P}(T)\Phi^T(t, T) + \int_T^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{G}^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau$$

随机可控性——定义

若无量测数据但有完善验前信息，滤波协方差方程退化为：

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \quad (17)$$

$$\mathbf{P}(0) = 0 \quad (18)$$

形式上可解为：

$$\mathbf{P}(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{G}^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau \quad (19)$$

定义 (一致随机完全可控)

若存在 $t > 0$ 使得 $\mathbf{P}(t)$ **正定且有界**，则称系统是一致随机完全可控的。

随机可观性——定义

若无过程噪声及验前信息，滤波协方差方程退化为：

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{P}(0) \rightarrow \infty \quad (21)$$

利用 $\dot{\mathbf{P}}^{-1} = -\mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}$ 可导出 $\mathbf{P}^{-1}$ 的微分方程：

$$\dot{\mathbf{P}}^{-1}(t) = -\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) - \mathbf{F}^T(t)\mathbf{P}^{-1}(t) - \mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t) \quad (22)$$

$$\mathbf{P}^{-1}(0) = 0 \quad (23)$$

形式上可解为：

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \int_0^t \Phi^T(\tau, t) \mathbf{H}^T(\tau) \mathbf{R}^{-1}(\tau) \mathbf{H}(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \quad (24)$$

随机可观性——定义 (续)

定义 (一致随机完全可观)

若存在 $t > 0$ 使得 $P^{-1}(t)$ **正定且有界**，则称系统是一致随机完全可观的。

物理含义：

- 随机可控性：过程噪声能充分激励所有状态模态
- 随机可观性：量测信息能充分观测所有状态模态

定理

如果 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 及 $F(t)$ 有界，且系统是一致随机完全可控和一致随机完全可观的，则卡尔曼滤波算法**一致渐近稳定**。

推论：

- 误差系统 $\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = [\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t)$ 一致渐近稳定
- 对任意初值 $\hat{\mathbf{x}}(0)$ ，有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0$
- 计算误差等产生的干扰有界
- 滤波协方差 $\mathbf{P}(t)$ 在 t 充分大后与初值 $\mathbf{P}(0)$ 无关（唯一性）

过程噪声与量测噪声相关系统

考虑:

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = \mathbf{C}(t)\delta(t - \tau)$$

构造:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(t)]$$

其中 $\mathbf{D}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)$

最终滤波算法为:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (25)$$

$$\mathbf{K}(t) = [\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{R}^{-1}(t) \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{K}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \quad (27)$$

非线性系统模型

考虑非线性动态系统：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t) \quad (28)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(t) \quad (29)$$

其中 $\mathbf{w}(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}(t))$ 与 $\mathbf{v}(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}(t))$ 互不相关, $\mathbf{x}(0) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_0)$ 。

与线性系统的本质区别：

- 无法直接获得状态转移矩阵 $\Phi(t, \tau)$ 的闭式解
- Riccati 方程中的 $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{H}(t)$ 依赖于状态轨迹
- 需采用近似线性化方法进行次优滤波

基于标称轨迹的线性化——标称运动

设系统的**标称运动**为：

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(t), t), \quad \mathbf{x}^*(0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (30)$$

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), t) \quad (31)$$

若真实状态 $\mathbf{x}(t)$ 始终围绕标称状态 $\mathbf{x}^*(t)$ 附近变化，可进行一阶 Taylor 展开：

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{g}(\mathbf{x}^*, t) + \mathbf{F}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, t) + \mathbf{H}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

其中 Jacobian 矩阵沿标称轨迹计算：

$$\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t)}, \quad \mathbf{H}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t)} \quad (32)$$

基于标称轨迹的线性化滤波算法

完整算法总结如下：

状态方程	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t)$
------	--

量测方程	$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(t)$
------	--

滤波初值	$\hat{\mathbf{x}}(0) = E\mathbf{x}(0), \mathbf{P}(0) = \text{var}[\mathbf{x}(0)]$
------	---

滤波增益	$\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)$
------	--

状态估计	$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, t)]$
------	--

协方差阵	$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{Q}$
------	---

Jacobian	$\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \right _{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t)}$ $\mathbf{H}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^T} \right _{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t)}$
----------	--

注意：Jacobian 矩阵沿**标称轨迹**计算，而非估计轨迹。

扩展卡尔曼滤波算法 (EKF)

与标称轨迹法不同，EKF 的 Jacobian 矩阵沿**估计轨迹** $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 实时更新：

状态方程 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t)$

量测方程 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(t)$

滤波初值 $\hat{\mathbf{x}}(0) = E\mathbf{x}(0), \mathbf{P}(0) = \text{var}[\mathbf{x}(0)]$

滤波增益 $\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)$

状态估计 $\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}, t)]$

协方差阵 $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} + \mathbf{Q}$

Jacobian $\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}$
 $\mathbf{H}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)}$

实际工程中常见情形：**连续时间动态 + 离散时间量测**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}(t)) \quad (33)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t_k)] + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k) \quad (34)$$

算法结构——两个交替阶段：

- **时间修正** ($t_{k-1} \leq t < t_k$)：连续传播状态与协方差
- **量测修正** ($t = t_k$)：离散量测更新

混合时间系统 EKF——时间修正

在 $t_{k-1} \leq t < t_k$ 区间, 无量测数据, 仅进行时间传播:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(t), t), \quad \hat{\mathbf{x}}(t_{k-1}^+) = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} \quad (35)$$

协方差传播采用线性化近似:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{F}(t)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (36)$$

$$\mathbf{F}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t)} \quad (37)$$

微分 Riccati 方程:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{Q}(t) \quad (38)$$

$$\mathbf{P}(t_{k-1}^+) = \mathbf{P}_{k-1|k-1} \quad (39)$$

得到预测值: $\hat{\mathbf{x}}(t_k^-)$, $\mathbf{P}(t_k^-)$

混合时间系统 EKF——量测修正

在 $t = t_k$ 时刻获得离散量测 y_k , 进行量测更新:

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(t_k^-)} \quad (40)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}(t_k^-) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}(t_k^-) \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k^+) = \hat{\mathbf{x}}(t_k^-) + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_k^-))] \quad (42)$$

$$\mathbf{P}(t_k^+) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}(t_k^-) \quad (43)$$

完整算法总结:

时间修正	$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, t), \quad t_{k-1} \leq t < t_k$ $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$
------	---

量测修正	$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}(t_k^-) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}(t_k^-) \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}(t_k^+) = \hat{\mathbf{x}}(t_k^-) + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t_k^-))]$ $\mathbf{P}(t_k^+) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}(t_k^-)$
------	--

连续时间系统平滑算法概述

平滑是指利用 $[0, T]$ 区间上的全部量测数据 $\{\mathbf{y}(s), 0 \leq s \leq T\}$ 来估计某时刻 $t \in [0, T]$ 的状态 $\mathbf{x}(t)$ 。

三种主要平滑类型：

- **固定区间平滑** (Fixed-Interval Smoothing): t 变化, T 固定
- **固定点平滑** (Fixed-Point Smoothing): t 固定, T 增加
- **固定延迟平滑** (Fixed-Lag Smoothing): $T - t = \Delta$ 固定, T 增加

核心思想：前向滤波 + 反向滤波 $\rightarrow$ 融合估计

固定区间平滑——前向滤波

考虑系统 $t \in [0, T]$:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

前向卡尔曼滤波 (与常规滤波完全相同):

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{x}}_f = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{P}_f\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_f] \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_f = \mathbf{F}\mathbf{P}_f + \mathbf{P}_f\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}_f\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_f \quad (45)$$

初值: $\hat{\mathbf{x}}_f(0) = \bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_f(0) = \mathbf{P}_0$

固定区间平滑——反向滤波

设 $\tau = T - t$, 反向时间系统:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} &= -\mathbf{F}(\tau)\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{G}(\tau)\mathbf{w}(\tau) \\ \mathbf{y}(\tau) &= \mathbf{H}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{v}(\tau)\end{aligned}$$

将前向滤波中 $\{\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{G}\}$ 换为 $\{-\mathbf{F}, -\mathbf{B}, -\mathbf{G}\}$ 即得反向滤波:

$$\frac{d}{d\tau}\hat{\mathbf{x}}_b = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{P}_b\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_b] \quad (46)$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{P}_b = -\mathbf{F}\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_b\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \mathbf{P}_b\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}_b \quad (47)$$

反向滤波——信息状态变换

平滑器公式直接使用 $\{\mathbf{P}_b^{-1}, \hat{\chi}_b\}$, 而非 $\{\mathbf{P}_b, \hat{\mathbf{x}}_b\}$ 。需要建立 $\mathbf{P}_b^{-1}$ 和 $\hat{\chi}_b$ 的微分方程。

利用矩阵求逆恒等式 $\frac{d\mathbf{P}_b^{-1}}{d\tau} = -\mathbf{P}_b^{-1} \frac{d\mathbf{P}_b}{d\tau} \mathbf{P}_b^{-1}$, 将反向滤波方程 (46)(47) 变换为:

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{P}_b^{-1} = \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{P}_b^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_b^{-1} \quad (48)$$

$$\frac{d}{d\tau} \hat{\chi}_b = [\mathbf{F} - \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_b^{-1}]^T \hat{\chi}_b - \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{B} u + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} y \quad (49)$$

边界条件: $\mathbf{P}_b^{-1}(\tau = 0) = 0$, $\hat{\chi}_b(\tau = 0) = 0$, 其中 $\hat{\chi}_b = \mathbf{P}_b^{-1} \hat{\mathbf{x}}_b$

为什么初值为零？

- 在终端时刻 $t = T$ (即反向时间 $\tau = 0$)，前向滤波已使用全部量测数据
 $\Rightarrow$ 反向滤波从终端开始时**没有任何「未来」信息**
- 反向协方差矩阵 $\mathbf{P}_b(T) \rightarrow \infty$ (完全无信息)
 $\Rightarrow \mathbf{P}_b^{-1}(\tau = 0) = \mathbf{P}_b^{-1}(T) = 0$
- 反向信息状态 $\hat{\mathbf{x}}_b = \mathbf{P}_b^{-1} \hat{\mathbf{x}}_b$ ，由 $\mathbf{P}_b^{-1}(T) = 0$ 直接得
 $\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_b(\tau = 0) = 0$

在此零初值条件下反向积分方程 (48) (49)，可得任意 $t < T$ 时刻的 $\mathbf{P}_b^{-1}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_b(t)$ ，它们正是最优平滑器所需的输入量。

固定区间平滑——最优平滑器

根据融合估计原理, $t \in [0, T]$ 时刻的最优平滑估计为:

$$\mathbf{P}(t) = [\mathbf{P}_f^{-1}(t) + \mathbf{P}_b^{-1}(t)]^{-1} \quad (50)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}(t)[\mathbf{P}_f^{-1}(t)\hat{\mathbf{x}}_f(t) + \hat{\mathbf{x}}_b(t)] \quad (51)$$

物理意义:

- 平滑协方差 $\mathbf{P}(t)$: 前向与反向信息 ($\mathbf{P}_f^{-1}$, $\mathbf{P}_b^{-1}$) 的**加权和之逆** (信息融合)
- 平滑估计 $\hat{\mathbf{x}}(t)$: 前向估计 $\hat{\mathbf{x}}_f$ 与反向信息 $\hat{\mathbf{x}}_b$ 的**加权融合**
- 协方差比单独前向滤波更小, 即平滑精度高于滤波精度

固定区间平滑——RTS 平滑公式

Rauch-Tung-Striebel (RTS) 平滑将反向滤波与平滑融合为一体，直接从已完成的前向滤波结果反向积分：

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{P} = -[\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_f^{-1}] \mathbf{P} - \mathbf{P} [\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_f^{-1}]^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \quad (52)$$

$$\frac{d}{d\tau} \hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \mathbf{P}_f^{-1} [\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_f] \quad (53)$$

边界条件： $\mathbf{P}|_{\tau=0} = \mathbf{P}_f(T)$, $\hat{\mathbf{x}}|_{\tau=0} = \hat{\mathbf{x}}_f(T)$

说明：

- 直接利用前向滤波结果 $\mathbf{P}_f, \hat{\mathbf{x}}_f$ 反向积分，**无需** 单独求解反向滤波方程
- 前向滤波结束后，从 $t = T$ 到 $t = 0$ 反向扫描一次即可完成全部平滑

固定点平滑与固定延迟平滑

固定点平滑

设 t 为待平滑的固定时刻, $T \geq t$ 为滤波右端点:

$$\frac{d}{dT}\Phi(t, T) = -\Phi(t, T)[F(T) + GQG^T P_f^{-1}(T)]$$

$$\frac{d}{dT}\hat{x}(t|T) = \Phi(t, T)P_f(T)H^T(T)R^{-1}(T)[y(T) - H(T)\hat{x}_f(T)]$$

固定延迟平滑

设延迟 $\Delta > 0$ 固定, 随 T 增加估计 $T - \Delta$ 时刻的状态:

- 当 Δ 足够大时, 延迟平滑精度与固定区间平滑一致
- 需要转移矩阵 $\Psi(T - \Delta, T)$ 的计算

固定区间平滑算例

考虑标量随机系统：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= w, & w &\sim \mathcal{N}(0, q) \\ z &= x + v, & v &\sim \mathcal{N}(0, r)\end{aligned}$$

稳态滤波协方差 $p(t) = \alpha = \sqrt{rq}$ 。分别用两种方法求固定区间平滑稳态解。

方法一：前向-反向滤波

前向稳态： $\dot{p} = q - p^2/r = 0 \Rightarrow p = \alpha$

反向稳态： $\frac{dp_b}{d\tau} = q - p_b^2/r = 0 \Rightarrow p_b = \alpha$

平滑协方差： $p(t|T) = [p^{-1}(t) + p_b^{-1}(t)]^{-1} = \alpha/2$

平滑估计： $\hat{x}(t|T) = \frac{1}{2}[\hat{x}(t) + \hat{x}_b(t)]$

方法二：RTS 公式

$\dot{p}(t|T) = \frac{2q}{\alpha}p(t|T) - q, \quad p(T|T) = \alpha$

稳态解同样可得 $p(t|T) = \alpha/2$ ，即平滑误差协方差为滤波协方差的一半。

定义

如果最优平滑器提供的状态估计优于最终最优滤波器估计向后反向插值时获得的状态估计，则称该状态是**可平滑的**。

- 只有系统过程噪声可控的状态才是可平滑的
- 常值状态（无过程噪声激励）是不可平滑的
- 随机时变的状态（受过程噪声驱动）是可平滑的

上述结论对离散时间系统的平滑同样成立。

本讲围绕连续时间随机系统的滤波与平滑问题，系统介绍了以下内容：

- **系统建模与解结构。**建立了连续时间线性系统的状态空间模型，推导了状态转移矩阵的微分方程和系统状态的闭式解。
- **连续时间卡尔曼滤波。**由离散卡尔曼滤波令 $\Delta t \rightarrow 0$ 导出连续时间算法，给出微分 Riccati 方程和增益公式，并推广到含确定性输入及噪声相关情形。
- **最优预测。**给出了无新量测时状态和协方差的时间传播方法。
- **随机可控性与随机可观性。**定义了随机可控性与可观性条件，给出了滤波一致渐近稳定的充分条件。
- **非线性系统滤波。**介绍了标称轨迹与估计轨迹两种线性化扩展方法，给出了混合时间系统下 EKF 的完整实现框架。
- **连续时间平滑算法。**阐述了固定区间、固定点、固定延迟三种平滑类型，推导了前向滤波、反向滤波、信息状态变换及 RTS 平滑的微分方程，分析了可平滑性条件。

以下方向值得进一步关注和研究：

- **非线性滤波改进方法。** UKF 和容积卡尔曼滤波通过确定性采样传播统计量，相比 EKF 对强非线性有更好的适应能力。
- **强跟踪与自适应滤波。** 强跟踪滤波引入渐消因子保持残差正交，自适应滤波在线估计未知噪声特性，提升时变系统的鲁棒性。
- **分布式滤波与信息融合。** 基于信息形式的分布式卡尔曼滤波和一致性滤波可在降低通信负载的同时实现全局最优估计。
- **数据驱动滤波方法。** 深度学习与传统模型驱动结合，形成混合滤波框架。
- **复杂条件下鲁棒滤波。** 大延迟、数据丢包、带宽受限等条件下的稳定滤波仍是挑战性课题。